Algebraische Aspekte der Logik

Thomas Vetterlein
Lehrstuhl Informatik 1, Universität Dortmund
44221 Dortmund, Deutschland
Thomas.Vetterlein@uni-dortmund.de

Februar 2006

Zusammenfassung

Dieser Bericht befaßt sich mit algebraischen Aspekten formaler Systeme der Aussagenlogik. Es geht dabei schwerpunktmäßig um die innere Struktur eines Systems von Aussagen, das im Rahmen eines logischen Kalküls formalisiert werden kann.

Es werden zunächst die Grundtatsachen zusammengestellt, die das wechselseitige Verhältnis eines Systems von Aussagen und eines zugehörigen logischen Kalküls betreffen. Erstes Beispiel ist die klassische Aussagenlogik.

Der weitere Schwerpunkt liegt sodann auf den sogenannten mehrwertigen Logiken. Diese sind geschaffen, um unscharfe Aussagen zu formalisieren, d.h. solche, denen Fuzzymengen entsprechen. Die Besonderheit mehrwertiger Logiken liegt darin, daß ein kontinuierliches Spektrum an Wahrheitswerten zur Verfügung steht.

Vorgestellt wird in aller Ausführlichkeit die Hájeksche Standardfuzzylogik, die sogenannte Basic Logic **BL**. In knapperer Form folgen die łukasiewicssche, Produkt- und gödelsche Logik. Die zugehörigen Algebren sind die BL-Algebren bzw. MV-, Produkt- und prälineare Heytingalgebren.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Logik und formale Deduktionssysteme

Mathematische Modellierung stützt sich auf formale Systeme zum logischen Schließen. Wenn für ein Problem, das mathematisch angegangen werden soll, ein adäquater formaler Rahmen gefunden ist, ist dieses Problem einerseits überhaupt erst präzisierbar und andererseits die Voraussetzung dafür geschaffen, es systematisch zu untersuchen. Die Frage sei einleitend gestellt, wie ein formaler Rahmen mit dem dazugehörigen logischen Kalkül prinzipiell eigentlich zustandekommt – um im weiteren diejenigen Systeme, um die es in diesem Text geht, d.h. klassische und nichtklassische Aussagenlogik, von ihrem Ansatz her einordnen zu können.

Ausgangspunkt für jede Formalisierung mit mathematischen Mitteln ist ein anschauliches Bild; Formalität kommt nicht von irgendwoher und ist auch kein Selbstzweck. Ausgegangen wird von ausgewählten anschaulichen Merkmalen, die Gegenständen in einer vorgegebenen Situation zukommen können. Es kann sich etwa um Längenmaße, um Aufenthaltsorte, um eine Anzahl oder alles sonstige handeln, was der Beschreibung eines Sachverhaltes dienlich ist. Die Beschreibung selbst ist sodann relativer Art: Man grenzt ein für einen Sachverhalt charakteristisches Merkmal gegen andere Konstellationen ab. So werden etwa Längen > 0 im Vergleich gesehen, ist eine Anzahl $n \geq 1$ dadurch charakterisiert, daß es sich um eines mehr als $n - 1$ handelt, und erfolgen Ortsangaben relativ zu anderen Orten. Insgesamt werden also Aussagen formalisiert, die eine Gegebenheit relativ zu anderen Gegebenheiten beschreiben, und Ziel ist es, alle richtigen solchen Aussagen auszusondern sowie systematisch die logischen Abhängigkeiten zwischen solchen Aussagen zu erforschen.

Die wesentlichen Schritte vom Inhaltlichen hin zum Entwurf eines konkreten Kalküls können wie folgt zusammengefaßt werden. Von einem prototypischen Sachverhalt sind diejenigen Merkmale, um die es gehen soll, zu abstrahieren und muß eine Sprechweise festgelegt werden, um die Merkmale sowie ihr wechselseitiges Verhältnis benennen zu können. Des weiteren muß die mit der passenden Struktur versehene Gesamtmenge aller möglichen Merkmale in Betracht gezogen werden; die Aussagen können dann, ihrer syntaktischen Form entsprechend, an auf diese abstrakte Struktur verweisende Inhalte gebunden werden. Durch diese beiden Schritte versetzt man sich in die Lage, in definierter Weise über einen Sachverhalt Aussagen machen zu können. Der entscheidende Schritt ist schließlich der letzte: Man hat auf der Grundlage ihrer möglichen Inhalte eine eindeutige Vorgehensweise zu bestimmen, wie welche Aussagen aus anderen erschlossen werden können.

Eine Logik beruht dementsprechend auf drei Elementen:

- eine Menge von Zeichenketten, dazu dienlich, die Aussagen, die formalisiert werden sollen, in definierter Weise zu notieren;
- eine Semantik, die beschreibt, auf welche Art inhaltlicher Strukturen sich welche Art so notierter Ausdrücke beziehen;
- ein Regelwerk, das festlegt, welche Ausdrücke aus welchen anderen bewiesen werden können.

Die eigentliche Aufgabe besteht hierbei darin, die Beweisregeln mit den möglichen Inhalten in Übereinstimmung zu bringen. Daß sich aus einer Aussage α eine zweite Aussage β erschließen läßt, muß stets inhaltlich passen: In jeder der in Betracht gezogenen Strukturen, in der α zutrifft, muß auch β zutreffen. Idealerweise gilt auch die Umkehrung: Impliziert α β inhaltlich, sollte β aus α beweisbar sein.

1.2 Einordnung von Aussagenlogiken

Unter den Systemen zum formalen Schließen sind Aussagenlogiken naturgemäß die elementarsten, bedingen dadurch aber auch ein Höchstmaß an Abstraktion. Aussagenlogiken sind nicht mit Systemen vergleichbar, die wie etwa die Zahlentheorie mit Objekten und Prädikaten zu tun haben, sondern liegen allenfalls solchen vergleichsweise konkreten Systemen zugrunde.

Der Sinn von Aussagenlogiken besteht darin, Aussagen zu formalisieren, die in einem beliebig vorgegebenen Zusammenhang auftreten können; ein konkreter Inhalt wird nicht vorausgesetzt und somit auch die Art von Situation, von der man ausgeht, nicht näher spezifiziert. Formalisiert werden nur Aussagen an und für sich, und die Rolle jeder solchen ist es, eine Situation hinsichtlich eines frei wählbaren Merkmals zu spezifizieren. An als wahr ableitbaren Sätzen werden sich folglich auch nur solche ergeben können, die unabhängig von etwaigen Inhalten zutreffen.

Auszugehen ist also statt von einer bestimmten einfach von irgendeiner Gegebenheit, die hinsichtlich ausgewählter Merkmale variieren kann; wir sprechen im folgenden, möglicherweise etwas vereinfacht, von einem System, das verschiedene Zustände annehmen kann. Man geht dabei nicht notwendiger-, aber durchaus typischerweise davon aus, daß ein Merkmal in einem gegebenen Zustand eindeutigerweise gilt oder nicht gilt, d.h. mit der Menge all derjenigen Zustände identifizierbar ist, in denen es zutrifft. Aus Merkmalen lassen sich dann durch Und- und Oderverknüpfung sowie Negation neue konstruieren – entsprechend dem mengentheoretischen Durchschnitt, der Vereinigung bzw. dem Komplement. Die dieser Herangehensweise entspringende Logik ist die klassische.

Die klassische Logik reflektiert den Grundtypus allen Denkens, und wenn wir im weiteren dieses Schema verallgemeinern, steht nicht die Absicht dahinter, die klassische Logik in ihrer Geltung einzugrenzen. Vielmehr beziehen wir etwas von dem mit ein, was zwischen Beobachtung und Denken liegt; kaum eine auf einer Beobachtung oder gar Einschätzung beruhende Stellungnahme kann mit völliger Gewißheit erfolgen. Wir können dementsprechend fordern zu berücksichtigen, daß Merkmale in realen Situationen meist uneindeutig sind. Auf ein Gelten oder Nichtgelten eines Merkmals kann man sich im konkreten Fall vielfach nicht festlegen, allenfalls auf einen gewissen Grad der Akzeptanz, ausgedrückt durch eine rationale Zahl zwischen 0 und 1. Ein Merkmal ist dann nicht mehr mit einer scharfen, sondern mit einer Fuzzy-Teilmenge der Menge aller Zustände zu identifizieren.

Als illustratives Beispiel kann jederzeit das folgende dienen: ein punktartiger Gegenstand, der sich beweglich irgendwo innerhalb eines abgegrenzten Raumbereiches befindet. Um über den Aufentshaltsort zu sprechen, können entweder Teile des Raumbereiches spezifiziert und jeder solchen die Aussage zugeordnet werden, daß sich der Gegenstand in ihm befindet. Betrachtet man ein System von Teilbereichen, das unter

Komplement und Durchschnitt abgeschlossen ist, ist die klassische Aussagenlogik adäquat. Man kann wegen unzureichender Beobachtungsmöglichkeiten aber auch uneindeutige Aufenthaltsorte in Betracht ziehen; schließlich hat der Gegenstand eine Ausdehnung und kann man Aufenthaltsorte immer nur mit Unsicherheit bestimmen. Somit kann man jedem Merkmal eine Fuzzymenge über den möglichen Aufenthaltsorten zuzuordnen; die klassische Aussagenlogik ist dann nicht mehr ausreichend.

2 Aussagenlogiken im allgemeinen

Der Begriff der Aussagenlogik soll in diesem Text voll und ganz auf Grundlage der vertretenen Inhalte entwickelt werden. Dies hat den Vorteil, daß der Sinn des Unterfangens von Anfang an klar ist und Rechtfertigungen nicht erst im nachhinein formuliert werden müssen.

Dies bedeutet, daß wir von den mathematischen Strukturen auszugehen haben, die Aussagen zu modellieren geeignet sind. Erst im nachfolgenden Schritt geht es um formale Kalküle, die auf diese Strukturen Bezug nehmen.

2.1 Systeme von Aussagen – die algebraischen Grundstrukturen

Wir stellen zunächst die grundlegenden algebraischen Begrifflichkeiten zusammen, die für die Beschreibung eines Systems von Aussagen benötigt werden. Wir wollen dabei noch kein konkretes System besprechen, sondern nur die minimalen Strukturmerkmale eines solchen zusammenstellen. Eine Orientierung geben uns die beiden folgenden Beispiele:

- ein System von Teilmengen einer fixen Menge, abgeschlossen unter Durchschnitt und Komplement und die leere Menge enthaltend – womit wir Ja-Nein-Aussagen modellieren;
- ein System von Fuzzymengen über einer fixen Menge, im einfachsten Fall das System aller Fuzzymengen über einer Menge – womit wir vage Aussagen modellieren.

Die wichtigste Struktur ist die der partiellen Ordnung: Eine Aussage kann aussagekräftiger sein als eine andere. Der Konvention gemäß setzt man $a \leq b$, um auszudrücken, daß die durch a vertretene Aussage *stärker* ist als b. Insbesondere ist dann das größte Element, welches immer als 1 notiert wird, die schwächste, d.h. keine Information beinhaltende Aussage „wahr“; und das kleinste Element, welches als 0 notiert wird, ist die Aussage „falsch“, welche Inkonsistenz, d.h. Widerspruch ausdrückt.

Definition 2.1 Eine Struktur $(A; \leq)$ heiße *partiell geordnete Menge [partially ordered set]*[1] oder kurz *Poset*, falls $\leq$ eine reflexive, antisymmetrische und transitive binäre Relation ist. Gibt es dann ein kleinstes Element 0 und ein größtes 1, heiße $(A; \leq, 0, 1)$ ein *Poset mit 0 und 1.*

Es sei $(A; \leq)$ ein Poset, deren je zwei Elemente $a, b \in A$ eine größte untere Schranke $a \wedge b$ sowie eine kleinste obere Schrank $a \vee b$ von a und b besitzen. Dann heiße $(A; \wedge, \vee)$ *Verband [lattice]* mit der unterliegenden Ordnung $\leq$. Gibt es zudem ein kleinstes Element 0 und ein größtes 1, heiße $(A; \wedge, \vee, 0, 1)$ ein *Verband mit 0 und 1.*

Man beachte, daß wir hier im Wechsel zwischen einer auf der Relation $\leq$ und einer auf zwei binären Operationen basierenden Struktur sprechen. Als der primäre Begriff ist der des Posets $(A; \leq)$ anzusehen; im folgenden haben wir es jedoch ausschließlich mit Verbänden zu tun und ist es um einiges praktischer, mit Operationen zu arbeiten als mit einer Relation. Wir erinnern an die alternative Formulierung.

Lemma 2.2 *Die Algebra $(A; \wedge, \vee)$ ist genau dann ein Verband, wenn für alle $a, b, c \in A$* (i) $a \wedge a = a \vee a = a$, (ii) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$, (iii) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ *und* (iv) $a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$ *gilt.*

Für die A unterliegende Ordnung gilt dann

$$a \leq b, \quad gdw \ \ a = a \wedge b.$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche grundlegenden Eigenschaften eine Operation haben sollte, um die Rolle einer Konjunktion übernehmen zu können. In Frage kommt natürlich $\wedge$, das Infimum; dies ist in gewissen Fällen auch die adäquate Wahl und im übrigen die einzige, die sich ohne Probleme rechtfertigen läßt. Nichtsdestoweniger existieren weitere Möglichkeiten, insbesondere wenn es um Systeme von Fuzzymengen geht. Eine kanonische Alternative zum Infimum ist i.a. nicht vorhanden, weswegen wir im weiteren nur die Mindestannahmen formulieren: Kommutativität, Assoziativität und neutrales Verhalten des Einselementes. Wir notieren die Konjunktion als $\odot$.

[1]Zum besseren Vergleich mit der Literatur füge ich, sofern sinnvoll erscheinend, jeweils die englischen Termini mit an. Zu beachten ist allerdings, daß diese nicht gerade einheitlich sind.

Zur Konjunktion, wenn sie denn einmal festgelegt ist, tritt sodann eine weitere Verknüpfung: die Implikation $\rightarrow$. Diese hat die folgende Bedeutung: Für zwei durch a und b vertretene Aussagen steht $a \rightarrow b$ für *die schwächste Aussage, welche zusammen mit a stärker ist als b.* M.a.W. ist $a \rightarrow b$ das größte Element unter allen x, für das $x \odot a \leq b$ gilt.

Definition 2.3 Ein *residuierter Verband [residuated lattice]* ist eine Struktur $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$, für die folgendes gilt:

(RV1) $(A; \wedge, \vee, 0, 1)$ ist ein Verband mit 0 und 1.

(RV2) $(A; \odot, 1)$ ist ein kommutatives Monoid; d.h. $\odot$ ist eine assoziative und kommutative zweistellige Operation, und 1 ist ein Neutrales in bezug auf $\odot$.

(RV3) $\odot$ ist isoton; d.h. für $a, b \in A$ mit $a \leq b$ gilt $a \odot c \leq b \odot c$ für alle $c \in A$.

(RV4) Für $a, b \in A$ ist $a \rightarrow b$ das größte Element x mit der Eigenschaft $a \odot x \leq b$.

Damit haben wir bereits die Mindeststruktur definiert, die wir für ein mit Mitteln der Logik zu untersuchendes System von Aussagen voraussetzen werden. Für mehr Informationen über residuierte Verbände verweisen wir auf [JiTs] und die dortige Literaturliste.

Wir weisen nun auf die wichtigste Eigenschaft residuierter Verbände hin. Es geht uns letztlich darum, Implikationen zwischen Aussagen herzuleiten, d.h. Zusammenhänge der Form

$$\alpha(a_1, \ldots, a_k) \leq \beta(a_1, \ldots, a_k) \tag{1}$$

zu bestimmen, worin α und β Terme einer Sprache sind, die diejenige residuierter Verbände enthält, und $a_1, \ldots, a_k$ beliebig sind. Eine Ungleichung läßt sich in residuierten Verbänden dank des Axioms (RV4) aber auch anders notieren.

Lemma 2.4 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ *ein residuierter Verband. Dann gilt für alle* $a, b \in A$

$$a \leq b, \text{ gdw } a \rightarrow b = 1. \tag{2}$$

Insbesondere ist durch die Operation $\rightarrow$ allein die partielle Ordnung bereits eindeutig festgelegt.

Beweis. Aus $a \leq b$ folgt gemäß (RV4) $a \rightarrow b = 1$ wegen $a \odot 1 = a$. Weiter folgt aus (RV4) $a \odot (a \rightarrow b) \leq b$, womit auch die Umkehrung klar ist. □

Es folgt, daß die Aufgabe, alle möglichen Ungleichungen der Form (1) zu bestimmen, darauf reduziert werden kann, alle Terme γ zu finden, für die

$$\gamma(a_1, \ldots, a_k) = 1$$

gilt. Dies vereinfacht die Sache wesentlich, da es jetzt darum geht, eine Teilmenge von Aussagen der gegebenen Sprache auszusondern - die sogenannten gültigen, die unter jeder Belegung den Wert 1 haben.

Wir stellen weitere Eigenschaften residuierter Verbände zusammen.

Lemma 2.5 *Es sei $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ ein residuierter Verband. Dann ist $\odot$ und $\rightarrow$ ein adjungiertes Paar, d.h. es erfüllt für alle $a, b, c \in A$ die Residuumseigenschaft*

$$a \odot b \leq c, \text{ gdw } a \leq b \rightarrow c. \tag{3}$$

Weiter gilt für alle $a, b, c \in A$ folgendes.

(i) *Die Operation $\rightarrow$ ist in der ersten Variable antiton und in der zweiten monoton: $a \leq b$ impliziert $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ sowie $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$.*

(ii) $a \odot 0 = 0,\ \ a \odot 1 = a,\ \ 0 \rightarrow a = 1,\ \ 1 \rightarrow a = a,\ \ a \rightarrow 1 = 1.$

(iii) *Es gilt*

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \odot c &\leq (a \odot c) \wedge (b \odot c), && (4)\\
(a \vee b) \odot c &= (a \odot c) \vee (b \odot c), && (5)\\
(a \wedge b) \rightarrow c &\geq (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c), && (6)\\
(a \vee b) \rightarrow c &= (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c), && (7)\\
a \rightarrow (b \wedge c) &= (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c), && (8)\\
a \rightarrow (b \vee c) &\geq (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c). && (9)
\end{aligned}$$

(iv) $a \to (b \to c) = (a \odot b) \to c$.

Beweis. Wir zeigen nur (3). Aus $a \odot b \leq c$ folgt $b \to c = \max\{x : b \odot x \leq c\} \geq a$. Aus $a \leq b \to c$ folgt $a \odot b \leq b \odot (b \to c)$, und nach Definition von $b \to c$ ist $b \odot (b \to c) \leq c$. □

2.2 Aussagenlogiken und zugehörige Kalküle

Für die Definition einer Aussagenlogik ist folgendes festzulegen: (i) eine Menge formalsprachlicher Aussagen; und (ii) diejenige Teilmenge hiervon, die die zutreffenden Aussagen enthält. Sodann ist (iii) zu untersuchen, welcher Kalkül die per (ii) spezifierten Aussagen liefert.

Definition 2.6 Eine *aussagenlogische Sprache* $\mathcal{L}$ besteht aus folgendem:

(i) aus abzählbar vielen *Konstanten* $c_0, c_1, \ldots$; hierunter muß zumindest 0, die *Wahrheitskonstante falsch*, sein;

(ii) aus abzählbar vielen *Verknüpfungen* $f_0, f_1, \ldots$, deren jeder eine *Stelligkeit* ≥ 1 zugeordnet ist; hierunter müssen zumindest die zweistellige *Implikation* $\to$ und die zweistellige *Konjunktion* $\odot$ sein.

Wir schreiben dann $\mathcal{L} = \{c_0, \ldots, f_0, \ldots\}$, voraussetzend, daß sich die Stelligkeit jeder Verknüpfung versteht. Taucht hierbei $\odot$ nicht auf, muß $\wedge \in \mathcal{L}$ sein und gelten $\odot$ und $\wedge$ als identisch.

Weiter legen wir eine abzählbar unendliche Menge von Symbolen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ fest, genannt *Aussagenvariablen.* Eine *$\mathcal{L}$-Aussage [proposition]* ist dann eine nach den folgenden Regeln zustande gekommene Zeichenkette: (i) die Aussagenvariablen und die Konstanten sind $\mathcal{L}$-Aussagen, und zwar die sogenannt *atomaren*; (ii) ist f_i eine s_i-stellige Verknüpfung und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_i}$ $\mathcal{L}$-Aussagen, so auch $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_i})$. Wir schreiben $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ für die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen, voraussetzend, daß sich die Menge von Aussagenvariablen versteht.

Zu dem, was eine aussagenlogische Sprache immer enthält, zählt also (i) eine Konjunktion, auf welche wir uns im allgemeinen Fall immer per $\odot$ beziehen, deren Rolle bei Fehlen einer solchen Verknüpfung aber von $\wedge$ übernommen wird, (ii) die Implikation $\to$ und (iii) die Wahrheitskonstante 0. Weiter betrachten wir hier nur endliche Sprachen; unendlichen Umfangs ist aber stets die Menge der Aussagenvariablen.

Von den definitionsgemäßen Vorgaben zur Notation von Aussagen werden im folgenden abweichen, wann immer dies zur besseren Übersicht beiträgt. So werden werden wir grundsätzlich die Infixnotation verwenden und z.B. statt $\to(\alpha, \beta)$ die suggestivere Form $\alpha \to \beta$ verwenden, wobei gegebenfalls durch Klammern die Bezüge eindeutig zu machen sind. Klammern verwenden wir dabei möglichst wenige, indem wir voraussetzen, daß $\odot$, $\wedge$, $\vee$ stärker bindet als $\to$. Im Fall großer Schachtelungstiefe verwenden wir sowohl runde als auch eckige Klammern.

Definition 2.7 Es sei $\mathcal{L}$ eine aussagenlogische Sprache. Eine $\mathcal{L}$-Struktur besteht aus einem nichtleeren *Grundbereich* A sowie je einem Element von A für jede Konstante von $\mathcal{L}$ und je einer s_i-stelligen Operation auf A für jede s_i-stellige Verknüpfung von $\mathcal{L}$; dabei notieren wir die Konstanten und Operationen von A genauso wie die korrespondierenden Konstanten und Verknüpfungen von $\mathcal{L}$.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur heiße *$\mathcal{L}$-Aussagen-Struktur*, falls $(A; \odot, \to, 0)$ das Redukt eines residuierten Verbandes ist.

Eine *Belegung [evaluation]* der $\mathcal{L}$-Aussagen *mit Werten aus einer $\mathcal{L}$-Struktur A* ist eine Abbildung $v\colon \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \to A$ dergestalt, daß $v(f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s_i}) = f_i(v(\alpha_1), \ldots, v(\alpha_{s_i}))$ für alle s_i-stelligen Verknüpfungen f_i von $\mathcal{L}$ sowie $v(c_i) = c_i$ für alle Konstanten c_i gilt. Im Fall $v(\alpha) = 1$ sagen wir, daß α *unter der Belegung v gültig* ist.

Man sieht leicht, daß eine Belegung bereits durch die den Aussagenvariablen zukommenden Werte eindeutig festgelegt ist.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum zentralen Begriff.

Definition 2.8 Es sei $\mathcal{L}$ eine aussagenlogische Sprache und $\mathcal{A}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Aussagen-Strukturen. Dann heiße ein Paar $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ eine *Aussagenlogik*, worin $\models_{\mathcal{A}}$ die wie folgt erklärte einstellige Relation auf den $\mathcal{L}$-Aussagen ist. Es sei α eine $\mathcal{L}$-Aussage.

(i) Für ein $A \in \mathcal{A}$ heiße α *in* A *gültig [valid]*, falls α unter jeder Belegung mit Werten aus A gültig ist. Wir schreiben dann $\models_A \alpha$.

(ii) α heiße bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *gültig*, falls α in jedem $A \in \mathcal{A}$ gültig ist. In diesem Falle gelte $\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Enthält hierbei $\mathcal{A}$ nur eine einzelne Algebra A, schreiben wir verkürzt $\models_A$ statt $\models_{\{A\}}$.

Man beachte, daß sich mit Übergang von $\mathcal{A}$ zu einer anderen Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen, etwa $\mathcal{A}'$, nicht unbedingt die zugehörige Aussagenlogik ändert: Es kann durchaus $\models_{\mathcal{A}} = \models_{\mathcal{A}'}$ gelten. – Wir vergleichen verschiedene Logiken in der folgenden Weise.

Definition 2.9 Es seien $(\mathcal{L}_1, \models_{\mathcal{A}_1})$ und $(\mathcal{L}_2, \models_{\mathcal{A}_2})$ Aussagenlogiken. Wir sagen, daß $(\mathcal{L}_2, \models_{\mathcal{A}_2})$ *stärker* ist als $(\mathcal{L}_1, \models_{\mathcal{A}_1})$, falls $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ und für jede $\mathcal{L}_1$-Aussagen α mit $\models_{\mathcal{A}_1} \alpha$ auch $\models_{\mathcal{A}_2} \alpha$ gilt.

Es ist klar, daß zwei Aussagenlogiken derselben Sprache im Fall, daß jede stärker ist als die andere, übereinstimmen.

Im weiteren interpretieren wir Aussagen α, β einer aussagenlogischen Sprache $\mathcal{L}$ in der naheliegenden Weise auch als $\mathcal{L}$-Terme mit freien Variablen, die mit Elementen des Grundbereiches einer $\mathcal{L}$-Algebra A belegbar sind. $\alpha = \beta$ oder, unter Erwähnung aller freien Variablen, $\alpha(a_1, \ldots, a_k) = \beta(a_1, \ldots, a_k)$ nennen wir eine $\mathcal{L}$-Gleichung. Daß $\alpha = \beta$ in A *gilt* oder A $\alpha = \beta$ *erfüllt*, heißt dann $\alpha(a_1, \ldots, a_k) = \beta(a_1, \ldots, a_k)$ für alle $a_1, ..., a_k \in A$.

Satz 2.10 *Zwei Aussagenlogiken* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}_1})$ *und* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}_2})$ *sind gleich, gdw* $\mathcal{A}_1$ *und* $\mathcal{A}_2$ *dieselbe Varietät erzeugen, d.h. gdw* $\mathrm{Var}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Var}(\mathcal{A}_2)$.

Insbesondere gilt für jede Aussagenlogik $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$*, daß* $\models_{\mathcal{A}} = \models_{\mathrm{Var}(\mathcal{A})}$.

Beweis. Sind $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}_1})$ und $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}_2})$ gleich, gilt eine Gleichung $\alpha = \beta$ in allen $A \in \mathcal{A}_1$, gdw $\alpha \to \beta = 1$ in allen $A \in \mathcal{A}_1$ gilt, gdw $\alpha \to \beta = 1$ in allen $A \in \mathcal{A}_2$ gilt, gdw $\alpha = \beta$ in allen $A \in \mathcal{A}_1$ gilt; es folgt in diesem Fall $\mathrm{Var}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Var}(\mathcal{A}_2)$.

Gilt umgekehrt $\mathrm{Var}(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Var}(\mathcal{A}_2)$, gilt eine Gleichung $\alpha = 1$ in allen $A \in \mathcal{A}_1$, gdw wenn sie in allen $A \in \mathcal{A}_2$ gilt, folgt also $\models_{\mathcal{A}_1} = \models_{\mathcal{A}_2}$.

Der zweite Teil folgt aus dem ersten. $\square$

Der Übergang von $\mathcal{A}$ zu $\mathrm{Var}(\mathcal{A})$ bedeutet also, $\mathcal{A}$ auf das mögliche Maximum zu vergrößern, ohne die Logik zu ändern.

Zwecks einfacher Definitionen von Logiken ist man umgekehrt bestrebt, $\mathcal{A}$ zu verkleinern. Unter Umständen reicht es bereits aus, sich auf die linear geordneten Algebren in $\mathcal{A}$ zu beschränken.

Definition 2.11 Es sei $\mathcal{L}$ eine aussagenlogische Sprache und $\mathcal{A}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Aussagen-Strukturen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}^{|}$ die Teilklasse von $\mathcal{A}$, die aus den linear geordneten Elementen von $\mathcal{A}$ besteht. Es heiße $\mathcal{A}$ *prälinear*, falls $\mathcal{A}$ in der von $\mathcal{A}^{|}$ erzeugten Varietät liegt.

Die Aussagenlogik $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}}) = (\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}^{|}})$ heiße in diesem Fall *wahrheitswertebasiert.*

Ist eine Aussagenlogik wahrheitswertebasiert, braucht man also nur die linear geordneten Algebren in Betracht zu ziehen – im günstigsten Fall gibt es davon nur eine einzige.

Die eigentliche Frage, der man auf dem Gebiet der Logik nachgeht, ist nun diejenige, wie sich die gültigen Aussagen einer Logik bestimmen lassen.

Definition 2.12 Es sei $\mathcal{L}$ eine Aussagensprache. Eine *Regel [rule]* (R) für $\mathcal{L}$ ist das Paar einer endlichen Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen und einer einzelnen solchen und wird gemäß

$$\text{(R)} \quad \frac{\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_k}{\beta};$$

notiert. Im Fall $k = 0$ heißt eine Regel auch *Axiomenschema [axiom scheme]* und wird einfach als β notiert.

Ersetzt man in einer Beweisregel (R) die Aussagenvariablen einheitlich durch beliebige andere Aussagen, heißt die resultierende Beweisregel eine *Instanz [instance]* von (R). Ist etwa $\frac{\alpha_1' \ \ldots \ \alpha_k'}{\beta'}$ Instanz der Beweisregel

(R), sagen wir, daß β' mittels der Regel (R) aus $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$ *ableitbar* ist; im Fall $k = 0$ sagen wir, daß β' *Axiom [axiom]* ist.

Ein *fregescher Beweiskalkül [Frege system] für* $\mathcal{L}$ oder kurz $\mathcal{L}$-*Kalkül* $\mathbf{C}$ ist eine endliche Menge von Regeln. Ein $\mathbf{C}$-*Beweis [proof]* ist dann eine endliche Folge von Aussagen $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ dergestalt, daß für jedes $i = 1, ..., l$ α_i entweder Axiom ist oder aus gewissen $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$, $j_1, ..., j_k < i$, mittels einer Regel aus $\mathbf{C}$ ableitbar ist. In einem solchen Fall heiße α_l in $\mathbf{C}$ *beweisbar [provable]*, in Zeichen $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha_l$.

Schließlich sei $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ eine Aussagenlogik, und $\mathbf{C}$ sei ein $\mathcal{L}$-Kalkül. Dann heiße $\mathbf{C}$ *korrekt [sound]* bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$, falls jede in $\mathbf{C}$ beweisbare Aussage bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ gültig ist. Weiter heiße $\mathbf{C}$ *vollständig [complete]* bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$, falls umgekehrt jede bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ gültige Aussage in $\mathbf{C}$ beweisbar ist.

Wir haben damit Aussagenlogiken als Mengen in bestimmten Strukturen gültiger Aussagen erklärt und den entsprechenden Begriff eines Beweiskalküls eingeführt. Es ist weiter auch denkbar, daß man erkunden möchte, ob eine Aussage unter gewissen Voraussetzungen gültig ist - d.h. unter der Vorgabe, daß die in ihr vorkommenden Variablen bestimmte Bedingungen erfüllen, die im allgemeinen nicht erfüllt sind. Wir geben entsprechend verallgemeinerte Versionen von Definition 2.8 und 2.12.

Definition 2.13 Es sei $\mathcal{L}$ eine aussagenlogische Sprache. Eine $\mathcal{L}$-*Theorie [theory]* sei eine Menge Φ von $\mathcal{L}$-Aussagen.

Ist die $\mathcal{L}$-Theorie Φ unter Substitutionen abgeschlossen, heiße Φ *offen.*

Eine Theorie ist dazu gedacht, Zusammenhänge zwischen spezifischen Aussagen vorzugeben, wie sie im allgemeinen nicht gelten; d.h. es gilt mit Bezug auf eine Aussagenlogik $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ für ein Element φ einer Theorie i.a. nicht $\models_{\mathcal{A}} \varphi$. Eine offene Theorie gibt Zusammenhänge vor, die für alle Aussagen gleichermaßen zu gelten haben.

Definition 2.14 Es sei $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ eine Aussagenlogik und Φ eine $\mathcal{L}$-Theorie. Dann gelte folgendes für eine $\mathcal{L}$-Aussage α:

(i) Für eine $\mathcal{L}$-Struktur $A \in \mathcal{A}$ setzen wir $\Phi \models_A \alpha$, falls für jede Belegung $v: \mathcal{P}_\mathcal{L} \to A$, unter der alle $\varphi \in \Phi$ gültig sind, auch α gültig ist.

(ii) Es gelte $\Phi \models_\mathcal{A} \alpha$, falls $\Phi \models_A \alpha$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.

In der naheliegenden Weise passen wir den Beweisbegriff an.

Definition 2.15 Es sei $\mathbf{C}$ ein $\mathcal{L}$-Kalkül und Φ eine $\mathcal{L}$-Theorie. Ein $\mathbf{C}_\Phi$-*Beweis* ist dann eine endliche Folge von Aussagen $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ dergestalt, daß für jedes $i = 1, ..., l \quad \alpha_i$ entweder Axiom oder aus Φ ist oder aus gewissen $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}$, $j_1, ..., j_k < i$, mittels einer Regel aus $\mathbf{C}$ ableitbar ist. In einem solchen Fall heiße α_l in $\mathbf{C}$ *aus* Φ *beweisbar*, in Zeichen $\Phi \vdash_\mathbf{C} \alpha_l$.

Falls für eine $\mathcal{L}$-Theorie Φ gilt $\Phi \vdash_\mathbf{C} 0$, heiße Φ *inkonsistent*, andernfalls *konsistent*.

Weiter sei $(\mathcal{L}, \models_\mathcal{A})$ eine Aussagenlogik. Dann heiße ein $\mathcal{L}$-Kalkül $\mathbf{C}$ *stark korrekt* bezüglich $(\mathcal{L}, \models_\mathcal{A})$, falls für jede Theorie Φ und $\mathcal{L}$-Aussage α aus $\Phi \vdash_\mathbf{C} \alpha$ stets $\Phi \models_\mathcal{A} \alpha$ folgt. $\mathbf{C}$ heiße *stark vollständig [strongly complete]* bezüglich $(\mathcal{L}, \models_\mathcal{A})$, falls umgekehrt aus $\Phi \models_\mathcal{A} \alpha$ stets $\Phi \vdash_\mathbf{C} \alpha$ folgt.

Falls dies nur für offene Theorien Φ gilt, heiße $\mathbf{C}$ *eingeschränkt stark vollständig.*

Leider gilt starke Vollständigkeit nicht unbedingt automatisch dann, wenn Vollständigkeit gilt, wie wir später werden einsehen müssen.

2.3 Beweise der Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls einer Aussagenlogik

Wir tragen hier die grundlegenden Techniken zusammen, die zum Beweis dazu verwendet werden können, daß ein Kalkül der für eine Logik passende ist.

Es ist dabei zunächst einmal klar, daß sich die Korrektheit eines Kalküls leicht überprüfen läßt; dies stellt selten eine Hürde dar und läßt sich wie folgt überprüfen.

Satz 2.16 *Es sei $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ eine Aussagenlogik und* **C** *ein $\mathcal{L}$-Kalkül. Dann ist* **C** *für $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ stark korrekt, insbesondere also korrekt, wenn für jede Belegung v der $\mathcal{L}$-Aussagen mit Werten aus einem $A \in \mathcal{A}$ und jede Regel $\frac{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{\beta}$ β unter v gültig ist, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ unter v gültig sind.*

Beweis. Dies ist unmittelbare Folge der Definitionen. □

Die eigentliche Herausforderung ist es, Vollständigkeit, oder gar starke Vollständigkeit, zu zeigen, falls sie denn gilt. Dem sind die folgenden Erwägungen gewidmet, die das Problem auf einer allgemeinen Ebene erörtern. Es bezeichnet $\mathcal{L} = \{\odot, \rightarrow, 0, \ldots\}$ stets eine Aussagensprache.

Wir betrachten nun das Verhältnis zwischen den Strukturen, auf denen eine Aussagenlogik beruht, und einem zugehörigen Kalkül. Wir beginnen mit der zu einem Kalkül gehörenden Algebrenklasse.

Definition 2.17 Es sei **C** ein $\mathcal{L}$-Kalkül. Dann heiße die Klasse aller $\mathcal{L}$-Strukturen, welche jede Gleichung $\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \beta(a_1, \ldots, a_n)$ erfüllt, falls in **C** für Aussagenvariablen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sowohl $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \rightarrow \beta(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ als auch $\beta(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \rightarrow \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ beweisbar ist, *die zu* **C** *gehörige Varietät* und sei als Var(**C**) notiert.

Um die zu einem Kalkül gehörige Varietät zu bestimmen, untersucht man die Algebra aller Aussagen $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, indem man als äquivalent beweisbare identifiziert. Damit dies einen Sinn ergibt, müssen jedoch gewisse Mindestbedingungen erfüllt sein, die wir als nächstes definieren.

Wir benutzen dabei folgende abkürzende Sprechweisen: Daß ein Kalkül **C** eine Aussage α beweist, heißt, daß α in **C** beweisbar ist. Daß in **C** eine Regel $\frac{\alpha_1 \ldots \alpha_k}{\beta}$ zulässig ist, heißt, daß, wenn **C** $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ beweist, dann auch β.

Definition 2.18 Es sei **C** ein $\mathcal{L}$-Kalkül. Wir nennen **C** *implikativ*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Im1) **C** beweist

$$0 \rightarrow \alpha,$$

$$\alpha \to \alpha,$$
$$(\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)].$$

(Im2) Für jede s-stellige Verknüpfung f von $\mathcal{L}$ und jedes $i = 1, ..., s$ ist die Regel

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \alpha}{f(\ldots, \alpha, \ldots) \to f(\ldots, \beta, \ldots)}$$

zulässig, wobei α bzw. β an i-ter Position stehen und die durch Punkte offengelassenen Stellen beliebige, nur links und rechts gleiche, Aussagen vertreten.

(Im3) Der Modus ponens

$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

ist zulässig.

In diesem Falle setzen wir

$$\alpha \sim_C \beta \text{ für } \vdash_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta \text{ und } \vdash_{\mathbf{C}} \beta \to \alpha.$$

für $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Lemma 2.19 *Es sei* $\mathbf{C}$ *ein bezüglich einer Aussagenlogik* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *korrekter implikativer Kalkül. Dann ist* $\sim_C$ *eine mit den Verknüpfungen verträgliche Äquivalenzrelation.*

Beweis. Daß $\sim_C$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus (Im1), zusammen (Im3). Die Vertäglichkeit ist aufgrund der Bedingung (Im2) offensichtlich. □

Definition 2.20 Es sei $\mathbf{C}$ ein $\mathcal{L}$-Kalkül. Es sei $[\alpha] = \{\beta : \alpha \sim_C \beta\}$ und $\mathcal{A}(\mathbf{C}) = \{[\alpha] : \alpha \in \mathcal{P}\}$. $\mathcal{A}(\mathbf{C})$, ausgestattet mit den von den Verknüpfungen induzierten Operationen sowie den Äquivalenzklassen der Konstanten, heiße *Lindenbaumalgebra* von $\mathbf{C}$.

Wir setzen zudem $[\alpha] \leq [\beta]$, falls in $\mathbf{C}$ $\alpha \to \beta$ beweisbar ist.

Satz 2.21 *Es sei* $\mathbf{C}$ *ein implikativer* $\mathcal{L}$*-Kalkül. Dann ist* $\leq$ *eine partielle Ordnung der Lindenbaumalgebra mit kleinstem Element* $[0]$.

Insbesondere gilt $[\alpha] = [\beta]$, *gdw in* $\mathbf{C}$ *sowohl* $\alpha \to \beta$ *als auch* $\beta \to \alpha$ *beweisbar ist.*

Beweis. Wegen (Im1) und (Im3) ist $\leq$ reflexiv und transitiv; und nach Konstruktion ist $\leq$ antisymmetrisch. Weiter ist gemäß (Im1) $[0]$ kleinstes Element.

Der zweite Teil folgt bereits daraus, daß $\sim_C$ Äquivalenzrelation ist. $\square$

Satz 2.22 *Es sei* $\mathbf{C}$ *ein implikativer* $\mathcal{L}$*-Kalkül. Dann ist die Lindenbaumalgebra* $\mathcal{A}(\mathbf{C})$ *in* $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$ *freie Algebra mit* $\aleph_0$ *Generatoren, d.h. jede abzählbare Algebra in* $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$ *ist homomorphes Bild von* $\mathcal{A}(\mathbf{C})$.

Beweis. Ist $\alpha \to \beta$ in $\mathbf{C}$ beweisbar, so auch jede Aussage, die aus $\alpha \to \beta$ durch Substitution der Aussagevariablen hervorgeht. Es folgt, daß $\mathcal{A}(\mathbf{C})$ zu $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$ gehört.

Weiter sei A eine $\mathcal{L}$-Algebra und $a_1, a_2, \ldots \in A$. Weiter seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Aussagenvariablen. Wir definieren eine Abbildung ι von den Äquivalenzklassen der Aussagevariablen nach $\{a_1, ...\} \subseteq A$ mittels $\iota([\varphi_i]) = a_i$ für $i = 1, \ldots$.

Wir behaupten, daß sich ι auf ganz $\mathcal{A}(\mathbf{C})$ ausdehnen läßt, daß wir also für jeden $\mathcal{L}$-Term α mit k freien Variablen definieren können: $\iota(\alpha([\varphi_{i_1}], \ldots, \varphi_{i_k}])) = \alpha(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$. Angenommen sei, daß für einen weiteren Term β in $\mathcal{A}(\mathbf{C})$ $\alpha([\varphi_{i_1}], \ldots, [\varphi_{i_k}]) = \beta([\varphi_{i_1}], \ldots, [\varphi_{i_k}])$ gilt. Dies aber heißt $[\alpha] = [\beta]$ und folglich aufgrund Satz 2.21, daß $\mathbf{C}$ sowohl $\alpha \to \beta$ als auch $\beta \to \alpha$ beweist. Gemäß Voraussetzung gilt damit die Gleichung $\alpha = \beta$ in A, insbesondere also $\alpha(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = \beta(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$. $\square$

Lemma 2.23 *Es sei* $\mathcal{L}$ *eine Aussagensprache,* $\mathbf{C}$ *ein implikativer* $\mathcal{L}$*-Kalkül und* α, β $\mathcal{L}$*-Terme. Dann gilt* $\alpha = \beta$ *in* $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$, *gdw in* $\mathbf{C}$ $\alpha \to \beta$ *und* $\beta \to \alpha$ *beweisbar sind.*

Beweis. Gilt $\alpha = \beta$ in $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$, so insbesondere in $\mathcal{A}(\mathbf{C})$, und es folgt die Beweisbarkeit der beiden Implikationen aus Satz 2.21.

Die Rückrichtung gilt definitionsgemäß. □

Die Kenntnis der zu einem implikativen Kalkül gehörigen Varietät dient wie folgt zum Beweis der Vollständigkeit.

Satz 2.24 *Es sei* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *eine Aussagenlogik und* $\mathbf{C}$ *ein bezüglich* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *korrekter implikativer* $\mathcal{L}$*-Kalkül. Dann gilt* $\mathrm{Var}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Var}(\mathbf{C})$*. Weiter ist* $\mathbf{C}$ *für* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *vollständig, gdw* $\mathrm{Var}(\mathcal{A}) = \mathrm{Var}(\mathbf{C})$*.*

Beweis. Es sei $\alpha = \beta$ eine in $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$ geltende $\mathcal{L}$-Gleichung. Wegen Lemma 2.23 ist dann $\alpha \to \beta$ und $\beta \to \alpha$ in $\mathbf{C}$ beweisbar. Ist $\mathbf{C}$ korrekt, ist damit $\alpha \to \beta$ und $\beta \to \alpha$ bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ gültig, d.h. gilt $\alpha \to \beta = 1$ und $\beta \to \alpha = 1$ in jedem $A \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ nur aus residuierten Verbänden besteht, gilt $\alpha = \beta$ in jedem $A \in \mathcal{A}$ und folglich auch in $\mathrm{Var}(\mathcal{A})$. Es folgt $\mathrm{Var}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Var}(\mathbf{C})$.

Weiter sei $\mathbf{C}$ bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ vollständig. Dann gilt eine Gleichung $\alpha = \beta$ in $\mathrm{Var}(\mathcal{A})$, gdw $\alpha \to \beta$ und $\beta \to \alpha$ bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ gültig sind, gdw $\alpha \to \beta$ und $\beta \to \alpha$ in $\mathbf{C}$ beweisbar sind, gdw $\alpha = \beta$ in $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$ gültig ist. Also folgt dann $\mathrm{Var}(\mathbf{C}) = \mathrm{Var}(\mathcal{A})$.

Aus dieser Gleichung folgt umgekehrt die zweite Äquivalenz in dieser Aufzählung. Setzt man für β eine beliebige beweisbare Aussage, etwa 1, ergibt sich: Ist α bezüglich $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ gültig, so auch $\alpha \to 1$ und $1 \to \alpha$, und es folgt, daß $\alpha \to 1$ und $1 \to \alpha$ in $\mathbf{C}$ beweisbar sind. Mit (MP) ergibt sich weiter, daß α in $\mathbf{C}$ beweisbar ist. Damit ist die Vollständigkeit von $\mathbf{C}$ gezeigt. □

Will man also die Vollständigkeit eines implikativen Kalküls $\mathbf{C}$ bezüglich einer Aussagenlogik $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ beweisen, muß man zunächst die zu $\mathbf{C}$ gehörige Varietät $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$ bestimmen. Wir fragen nun, wie sich dies bewerkstelligen läßt.

Gemäß Satz 2.22 wird man eine Liste der Gleichungen zusammenstellen, die in der Lindenbaumalgebra gelten. Ob diese vollständig ist, läßt sich mit dem folgenden Lemma ermitteln.

Lemma 2.25 *Es sei* $\mathbf{C}$ *ein* $\mathcal{L}$*-Kalkül. Dann ist eine* $\mathcal{L}$*-Aussagen-Struktur* A *in* $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$*, wenn in bezug auf* A *alle* $\mathbf{C}$*-Regeln die Gültigkeit erhalten.*

Beweis. Unter der genannten Bedingung gilt, daß alle beweisbaren Aussagen unter einer Belegung mit Werten aus A den Wert 1 erhalten. Da A ein residuierter Verband ist, folgt die Behauptung. □

Damit ergibt sich:

Satz 2.26 *Es sei* $\mathbf{C}$ *ein implikativer* $\mathcal{L}$*-Kalkül. Es sei* $\mathcal{V}$ *eine Varietät von* $\mathcal{L}$*-Aussagen-Strukturen. Es gelte:*

(i) *Jede der Gleichungen, die in* $\mathcal{V}$ *gelten, gilt auch in der Lindenbaumalgebra* $\mathcal{A}(\mathbf{C})$*.*

(ii) *In bezug auf jede Belegung mit Werten aus einem* $A \in \mathcal{V}$ *erhält jede Regel von* $\mathbf{C}$ *die Gültigkeit.*

Dann ist $\mathcal{V} = \mathrm{Var}(\mathbf{C})$*, und* $\mathcal{A}(\mathbf{C})$ *ist freie Algebra in* $\mathcal{V}$ *mit* $\aleph_0$ *Generatoren.*

Beweis. Gemäß Lemma 2.25 folgt aus (ii) $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Var}(\mathbf{C})$. Weiter bedeutet (i), daß $\mathcal{A}(\mathbf{C}) \in \mathcal{V}$, und es folgt $\mathrm{Var}(\mathbf{C}) \subseteq \mathcal{V}$ aufgrund des Satzes 2.22.

Die letzte Aussage ist ebenfalls Inhalt von Satz 2.22. □

Der zweite Schritt, um Vollständigkeit eines implikativen Kalküls bezüglich einer Aussagenlogik $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ zu beweisen, besteht gemäß Satz 2.24 darin, festzustellen, ob $\mathbf{C}$ davon ab, ob $\mathrm{Var}(\mathcal{A}) = \mathrm{Var}(\mathbf{C})$ gilt. Dabei gilt, Korrektheit des Kalküls vorausgesetzt, $\mathrm{Var}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Var}(\mathbf{C})$ immer; das Problem ist, daß i.a. nicht evident ist, ob die von $\mathcal{A}$ erzeugte Varietät ganz $\mathrm{Var}(\mathbf{C})$ umfaßt. Ein mögliches Vorgehen ist das folgende.

Satz 2.27 *Es sei* $\mathbf{C}$ *ein für eine Aussagenlogik* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *korrekter implikativer Kalkül. Es sei* $\mathcal{C}$ *eine Klasse von* $\mathcal{L}$*-Strukturen mit* $\mathrm{Var}(\mathcal{C}) = \mathrm{Var}(\mathbf{C})$*. Weiter lasse sich jede partielle Unteralgebra eines* $B \in \mathcal{C}$ *in ein* $A \in \mathcal{A}$ *isomorph einbetten. Dann ist* $\mathbf{C}$ *bezüglich* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *vollständig.*

Beweis. Es sei die Aussage α in $\mathbf{C}$ nicht beweisbar. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{C}$ und eine Belegung v der in α vorkommenden Aussagenvariablen mit Werten aus B, so daß $v(\alpha) < 1$. Die von den vorkommenden Elementen und 1 erzeugte partielle Unteralgebra von B läßt sich in ein $A \in \mathcal{A}$ isomorph einbetten; dies aber heißt, daß es eine Belegung v' mit Werten aus A gibt, so daß $v'(\alpha) < 1$. Also ist α keine gültige Aussage. $\square$

Wie bemerkt, ist starke Vollständigkeit schwieriger, u.U. gar nicht zu beweisen. Es gilt jedoch folgender Satz.

Satz 2.28 *Es sei* $\mathbf{C}$ *ein für eine Aussagenlogik* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *vollständiger Kalkül. Dann ist* $\mathbf{C}$ *für* $(\mathcal{L}, \models_{\mathcal{A}})$ *auch eingeschränkt stark vollständig.*

Beweis. Es sei Φ eine offene Theorie. $\mathbf{C}_\Phi$ sei derjenige Kalkül, der aus C durch Hinzufügen der Axiomenschemata $\varphi \in \Phi$ hervorgeht. Für $\alpha \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ gilt dann $\Phi \vdash_\mathbf{C} \alpha$ offensichtlich, gdw $\vdash_{\mathbf{C}_\Phi} \alpha$.

Weiter sei $\mathcal{A}_\Phi$ die Klasse derjenigen $A \in \mathcal{A}$, in denen alle $\varphi \in \Phi$ gültig sind. Dann ist $\Phi \models_\mathcal{A} \alpha$ offensichtlich gleichbedeutend mit $\models_{\mathcal{A}_\Phi} \alpha$.

Zu zeigen ist also $\mathrm{Var}(\mathbf{C}_\Phi) = \mathrm{Var}(\mathcal{A}_\Phi)$.

Es sei $\mathcal{V}$ die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen, in denen alle $\varphi \in \Phi$ gültig sind. Klarerweise ist $\mathrm{Var}(\mathbf{C}_\Phi) \subseteq \mathrm{Var}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{V}$. Umgekehrt sei $A \in \mathrm{Var}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{V}$; dann erhält jede Regel aus $\mathbf{C}_\Phi$ die Gültigkeit in bezug auf A; also ist $A \in \mathrm{Var}(\mathbf{C}_\Phi)$, und es folgt $\mathrm{Var}(\mathbf{C}_\Phi) \subseteq \mathrm{Var}(\mathbf{C}) = \mathcal{V}$.

Weiter ist offensichtlich $\mathrm{Var}(\mathcal{A}_\Phi) = \mathrm{Var}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{V}$. Es folgt die Behauptung aus $\mathrm{Var}(\mathbf{C}) = \mathrm{Var}(\mathcal{A})$. $\square$

Damit wäre der Apparat vorgegeben, der dazu dient, eine Aussagenlogik zu definieren und ein formales Deduktionssystem als das adäquate zu beweisen. Wie dies im konkreten Fall funktioniert, sei in zwei Fällen im Detail ausgeführt: für die klassische Aussagenlogik sowie für die Fuzzylogik BL.

3 Klassische Aussagenlogik

3.1 Ansatz

Wir besinnen uns kurz zurück auf den Grundansatz für den Entwurf logischer Deduktionssysteme. Wir haben von einer anschaulichen Situation auszugehen, die hinsichtlich gewisser ausgewählter Merkmale variieren kann. Das Besondere der Aussagenlogik ist, daß wir die Situation nicht konkret spezifizieren. Was wir für eine bestimmte Aussagenlogik lediglich festzulegen haben, ist die Art der Merkmale, die wir formalisieren möchten.

Im zunächst zu besprechenden klassischen Fall soll es sich um Merkmale handeln, die in einem gegebenen Zustand eindeutig zutreffen oder nicht zutreffen. Wir gehen also von einer Menge $\mathcal{P}$ von Aussagen aus, deren jede die Wahrheitswerte 1 für *zutreffend* oder 0 für *nicht zutreffend* vertreten kann. Es müssen genügend Aussagen vorhanden sein, um jeden Zustand durch je eine Belegung $w\colon \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ der Aussagen mit Wahrheitswerten eindeutig beschreiben zu können.

Ist W dann die Menge aller möglichen Belegungen $w\colon \mathcal{P} \to \{0, 1\}$, läßt sich jede Aussage $\alpha \in \mathcal{P}$ mit der Teilmenge $v(\alpha) = \{w \in W\colon\ w(\alpha) = 1\}$ von W identifizieren. Unser System von Aussagen kann folglich durch ein System von Teilmengen einer fixen Menge interpretiert werden. Genau dies werden wir im folgenden tun.

Der Sinn eines formalen Kalküls der Aussagenlogik besteht nun darin, die allgemeingültigen wechselseitigen Beziehungen zwischen Aussagen zu erforschen. Dies wird ermöglicht durch Operationen zwischen Aussagen. Eine Ja-Nein-Aussage kann negiert werden; ein Paar zweier Aussagen kann und- sowie oderverknüpft werden. Mit Blick auf die Identifikation von Aussagen mit Teilmengen heißt Negation die Bildung des Komplements, Undverknüpfung die des Durchschnitts und Oderverknüpfung die der Vereinigung: $v(\neg\alpha) = \complement v(\beta) = W \setminus v(\beta)$, $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \cap v(\beta)$ und $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) \cup v(\beta)$. Hinzu kommt die Implikation $\alpha \to \beta$; diese soll die schwächste Aussage sein, die zusammen mit α β impliziert, also der größten Menge entsprechen, deren Durchschnitt mit α kleiner ist als β; es ergibt sich $\complement v(\alpha) \cup v(\beta)$.

Da die genannten Operationen nicht alle voneinander unabhängig sind, müssen wir im folgenden nicht alle zu Verknüpfungen machen; um die Darstellung zu vereinfachen, verwenden wir nur $\wedge$ und $\to$ sowie die 0 für die leere Menge.

Definition 3.1 Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}$ bestehe aus den binären Verknüpfungen $\wedge$ und $\to$ sowie der Konstanten 0. Es bezeichnet $\mathcal{P}_{\mathbf{KL}} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}}$ die Menge der $\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}$-Aussagen.

Es sei TmA die Klasse aller *Teilmengenalgebren* $(A; \wedge, \to, 0)$, worin ist A ein unter Durchschnitt und relativem Komplement abgeschlossenes und die leere Menge enthaltendes System von Teilmengen einer nichtleeren Menge ist und $\wedge$ den Durchschnitt, $\to$ das relative Komplement sowie 0 die leere Menge bezeichnet.

$(\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}, \models_{TmA})$ ist die *klassische Aussagenlogik.*

Satz 3.2 *Die klassische Aussagenlogik ist wahrheitswertebasiert.*

Sie stimmt mit der Aussagenlogik $(\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}, \models_{\mathbf{2}})$ überein, worin $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ gemäß der rechts stehenden Tabelle mit den Operationen $\wedge$ und $\to$ versehen ist.

a	b	$a \wedge b$	$a \to b$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Beweis. Jede Potenzmenge ist ein direktes Produkt der Algebra **2**, und jede Algebra von Teilmengen ist Unteralgebra einer solchen. Also ist die von **2** erzeugte Varietät dieselbe wie die von TmA erzeugte. □

3.2 Der Kalkül der klassischen Aussagenlogik

Wir definieren nun einen Beweiskalkül für die Sprache der klassischen Aussagenlogik und charakterisieren die Lindenbaumalgebra.

Definition 3.3 Der *Kalkül der klassischen Aussagenlogik* **KL** ist der $\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}$-Kalkül, der aus den Axiomenschemata

(K1) $[(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)] \to (\alpha \to \gamma)$,

(K2a) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$, (K2b) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,

(K3) $(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$,

(K4) $[(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)] \to [\alpha \to (\beta \wedge \gamma)]$,

(K5a) $[(\alpha \wedge \beta) \to \gamma] \to [\alpha \to (\beta \to \gamma)]$,

(K5b) $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \wedge \beta) \to \gamma]$,

(K6) $0 \to \alpha$,

(K7) $[(\alpha \to \beta) \wedge ((\alpha \to 0) \to \beta)] \to \beta$.

besteht sowie der Regel *Modus ponens*

$$\text{(MP)} \quad \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}.$$

In diesem Abschnitt beziehen sich alle Beweise auf den Kalkül **KL**, weswegen wir statt $\vdash_{\mathbf{KL}}$ einfach $\vdash$ schreiben werden.

Neben den definitionsgemäß vorhandenen Verknüpfungen lassen sich in diesem Kalkül natürlich auch die übrigen oben erwähnten verwenden. Formal handelt es sich dabei aber nur um Abkürzungen.

Definition 3.4 In **KL** stehe

$$\begin{array}{rcl} \neg\alpha & \text{für} & \alpha \to 0, \\ 1 & \text{für} & \neg 0, \\ \alpha \vee \beta & \text{für} & \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta), \\ \alpha \leftrightarrow \beta & \text{für} & (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha). \end{array} \tag{10}$$

Wir stellen als erstes fest:

Lemma 3.5 KL *ist bezüglich* $(\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}, \models_{TmA})$*, d.h. der klassischen Aussagenlogik, korrekt.*

Beweis. Wir machen Gebrauch von Satz 2.16. Aufgrund des Satzes 3.2 genügt es, die Gültigkeit der Axiome sowie den Erhalt der Gültigkeit unter (MP) für Belegungen mit Werten aus **2** zu überprüfen. $\square$

Wir bestimmen als nächstes die Lindenbaumalgebra von **KL**, definierbar aufgrund des nachfolgenden Lemmas, dessen elementaren, aber umfangreichen Beweis wir übergehen.

Lemma 3.6 **KL** *ist implikativ.*

Also können wir gemäß Definition 2.20 auf $\mathcal{A}(\mathbf{KL}) = \{[\alpha] \colon \alpha \in \mathcal{P}_{\mathbf{KL}}\}$ definieren:

$$\begin{aligned} [\alpha] \wedge [\beta] &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \wedge \beta], \\ [\alpha] \to [\beta] &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \to \beta], \\ \mathbf{0} &\stackrel{\text{def}}{=} [0] = \{\alpha \colon \alpha \sim_{\mathbf{KL}} 0; \} \end{aligned}$$

in derselben Weise induzieren alle durch (10) definierten Verknüpfungen Operationen auf $\mathcal{A}(\mathbf{KL})$. Weiter ist $\mathcal{A}(\mathbf{KL})$ durch

$$[\alpha] \leq [\beta], \quad \text{falls} \quad \vdash \alpha \to \beta$$

partiell geordnet.

Definition 3.7 Eine Operation $\neg \colon A \to A$ auf einem Poset mit 0 und 1, $(A; \leq, 0, 1)$, heiße *Komplementfunktion*, falls

$$\begin{aligned} &a \wedge \neg a = 0 \text{ und } a \vee \neg a = 1; \\ &a \leq b \text{ impliziert } \neg b \leq \neg a; \\ &\neg\neg a = a \end{aligned}$$

für alle $a, b \in A$ gilt.

Ein Verband $(A; \wedge, \vee)$ heißt *distributiv*, falls

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned} \tag{11}$$

für alle $a, b, c \in A$ gilt.

Eine Algebra $(A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ heiße *boolesche Algebra*, falls $(A; \wedge, \vee, 0, 1)$ ein distributiver Verband mit 0 und 1 ist und $\neg$ eine Komplementfunktion. Wir definieren dann das *relative Komplement* gemäß

$$\to \colon A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto \neg a \vee b. \tag{12}$$

Wir merken mit dem folgenden Lemma an, daß Distributivität bereits aus einer der beiden Gleichungen (11) allein folgt. Für konkrete Tripel von Elementen sind die beiden Bestandteile von (11) allerdings nicht notwendig äquivalent.

Lemma 3.8 *Ein Verband* $(A; \wedge, \vee)$ *ist distributiv, gdw für alle* $a, b, c \in A$ *die erste Gleichung in* (11) *gilt, gdw für alle* $a, b, c \in A$ *die zweite Gleichung in* (11) *gilt.*

Beweis. S. [Bir, I, Theorem 9]. □

Wir merken weiter an, daß man für boolesche Algebren auch einen anderen Satz von Operationen verwenden kann. Wenn $(A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ boolesche Algebra ist, können wir $\rightarrow$ gemäß (12) einführen; auf diese Weise gelangen wir zur Algebra $(A; \wedge, \rightarrow, 0)$. Aus letzterer gelangen wir zur ursprünglichen mittels (10) wieder zurück. Wir werden daher in diesem Fall sagen, daß $(A; \wedge, \rightarrow, 0)$ *(bis auf Definitionen)* eine boolesche Algebra sei.

Satz 3.9 *Die Lindenbaumalgebra* $(\mathcal{A}(\mathbf{KL}); \wedge, \rightarrow, \mathbf{0})$ *von* **KL** *ist (bis auf Definitionen) eine boolesche Algebra.*

Beweis. Da **KL** implikativ ist, ist $\mathcal{A}(\mathbf{KL})$ mittels $\leq$ gemäß Satz 2.21 partiell geordnet.

Es gilt $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ und $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$; und es impliziert $\vdash \gamma \rightarrow \alpha$ und $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, daß $\vdash \gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta$. Es folgt, daß $[\alpha \wedge \beta]$ das Infimum von $[\alpha]$ und $[\beta]$ ist. Ähnlich ist zu ersehen, daß $[\alpha \vee \beta]$ deren Supremum ist. Wegen $\vdash 0 \rightarrow \alpha$ und $\vdash \alpha \rightarrow 1$ ist 0 kleinstes und 1 größtes Element von $\mathcal{A}(\mathbf{KL})$. Also ist $(\mathcal{A}(\mathbf{KL}); \wedge, \vee, 0, 1)$ Verband mit 0 und 1.

Weiter läßt sich $\vdash ((\gamma \rightarrow \neg\alpha) \wedge (\gamma \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta))$ umschreiben gemäß $\vdash ((\neg\gamma \vee \neg\alpha) \wedge (\neg\gamma \vee \neg\beta)) \rightarrow (\neg\gamma \vee \neg(\alpha \vee \beta)$ und weiter $\vdash (\gamma \wedge (\alpha \vee \beta)) \rightarrow ((\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta))$. Hieraus folgt die Distributivität.

Schließlich gilt $\vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow 0$ und $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$, und es gilt $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ sowie $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$, $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$; daher ist $\neg$ auf

$\mathcal{A}(\mathbf{KL})$ eine Komplementfunktion. Somit ist der Beweis komplett, daß $(\mathcal{A}(\mathbf{KL}); \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ eine boolesche Algebra ist.

Es gilt $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \vee \beta)$ und $\vdash (\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$; es folgt, daß $\to$ das relative Komplement ist. $\square$

Satz 3.10 *Die zu* **KL** *gehörige Varietät ist (bis auf Definitionen) die aller booleschen Algebren* $(A; \wedge, \to, 0)$.

Insbesondere ist die Lindenbaumalgebra $(\mathcal{A}(\mathbf{KL}); \wedge, \to, \mathbf{0})$ *von* **KL** *die freie boolesche Algebra mit* $\aleph_0$ *Generatoren.*

Beweis. Die Axiome von **KL** sind unter Belegung mit Werten aus jeder booleschen Algebra gültig; und Gültigkeit wird von (MP) erhalten. Die Lindenbaumalgebra ist eine boolesche Algebra. Also ist gemäß Satz 2.26 Var(**KL**) die Varietät der booleschen Algebren. Der zweite Teil folgt aus Satz 2.22. $\square$

3.3 Struktur boolescher Algebren

Im Fall der klassischen Aussagenlogik sind wir in der günstigen Situation, daß die zum Kalkül gehörige Varietät bis auf Isomorphie mit der Algebrenklasse, auf die sich die Logik stützt, zusammenfällt. Denn jede boolesche Algebra ist darstellbar als eine Menge von Teilmengen einer fest gegebenen Grundmenge, zusammen mit dem Durchschnitt, der Vereinigung, dem Komplement sowie der leeren und der ganzen Menge. Diese Tatsache soll nun hergeleitet werden.

Der vorliegende Abschnitt ist unabhängig vom Rest lesbar. Für weitere Informationen über boolesche Algebren sei das Buch [Sik] oder [Mon] empfohlen.

Satz 3.11 *Es sei* W *eine nichtleere Menge, und es sei* A *eine Menge von Teilmengen von* W*, die die leere Menge enthält und unter Durchschnitts- und Komplementbildung abgeschlossen ist. Dann ist* $(A; \cap, \cup, \complement, \emptyset, W)$ *eine boolesche Algebra.*

Beweis. Es ist offensichtlich, daß $(A; \cap, \cup, \complement, \emptyset, W)$ alle Erfordernisse von Definition 3.7 erfüllt. $\square$

Für die umgekehrte Richtung sind einige Vorbereitungen nötig. Aus einer gegebenen Algebra müssen irgendwie die Punkte der Grundmenge konstruiert werden; das geschieht mithilfe der maximalen Filter.

Definition 3.12 Es sei $(A; \leq, \neg, 0, 1)$ eine boolesche Algebra. Eine Teilmenge F von A heiße *Filter*, falls (i) aus $a \in F$ und $a \leq b$ folgt, daß auch $b \in F$ ist, und (ii) aus $a, b \in F$ folgt, daß auch $a \wedge b \in F$ ist.

Ein Filter F von A heiße *maximal*, falls $F \subset A$ gilt, jedoch kein Filter F' existiert mit $F \subset F' \subset A$.

Lemma 3.13 *Es sei* $(A; \leq, \neg, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra.*

(i) *Ein Filter F von A ist maximal, gdw für jedes $a \in A$ genau eines der Elemente a oder $\neg a$ in F liegt.*

(ii) *Für Elemente $a, b \in A$ mit $a \not\leq b$ gibt es einen a enthaltenden, b jedoch nicht enthaltenden maximalen Filter.*

Beweis. (i) Es sei F maximaler Filter und $a \in A$. Dann kann höchstens eines der Elemente $a, \neg a$ in F liegen, da wegen $a \wedge \neg a = 0$ sonst $0 \in F$ und damit $F = A$ wäre. Angenommen sei weiter, daß weder a noch $\neg a$ in F liegt. Es sei dann F_a der von a und F erzeugte Filter; es ist offenbar $F_a = \{x : x \geq a \wedge y \text{ für ein } y \in F\}$. Nach Annahme muß $F_a = A$ sein, also $\neg a \geq a \wedge y$ für ein $y \in F$ gelten. Daraus folgt $\neg a \geq (a \wedge y) \vee \neg a = y \vee \neg a \geq y$, also $\neg a \in F$ entgegen der Annahme.

Umgekehrt enthalte ein Filter F für jedes $a \in A$ genau eines der Elemente a und $\neg a$. Damit enthält er nicht jedes Element; und enthielte er eines mehr, so wäre etwa $a, \neg a \in F$, folglich $0 \in F$ und $F = A$.

(ii) Die Menge $\{x \colon x \geq a\}$ ist ein a, nicht jedoch b enthaltender Filter. Unter all den Mengen mit dieser Eigenschaft gibt es gemäß Zornschem Lemma eine maximale, etwa F. Angenommen sei, daß F kein maximaler Filter sei, daß also für ein $c \in A$ weder c noch $\neg c$ in F liegt. Es sei $F_c = \{x \colon x \geq c \wedge y \text{ für ein } y \in F\}$ der von c und F erzeugte Filter sowie

$F_{\neg c}$ der von $\neg c$ und F erzeugte. Nach Voraussetzung enthalten sowohl F_c als auch $F_{\neg c}$ das Element b, womit $b \geq c \wedge y_1$ sowie $b \geq \neg c \wedge y_2$ für gewisse $y_1, y_2 \in F$ gilt. Mit $z = y_1 \wedge y_2 \in F$ folgt $b \geq (c \wedge z) \vee (\neg c \wedge z) = z$, also $b \in F$ im Widerspruch zur Annahme. □

Es folgt die Darstellung boolescher Algebren durch Systeme von Teilmengen. Wir notieren die Potenzmenge einer Menge X, d.h. die Menge aller Teilmengen von X, durch $\mathbf{P}X$.

Satz 3.14 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra. Es sei* W *die Menge aller maximaler Filter von* A. *Es sei*

$$\rho\colon A \to \mathbf{P}W, \quad a \mapsto \{F \in W\colon a \in F\}.$$

Dann ist ρ *ein isomorphe Einbettung von* $(A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ *in* $(\mathbf{P}W; \cap, \cup, \complement, \emptyset, W)$.

Beweis. Es sei $a, b \in A$ mit $a \leq b$; dann gilt für jeden Filter F mit $a \in F$, daß auch $b \in F$ ist; es folgt $\rho(a) \subseteq \rho(b)$.

Es sei $a \in A$; dann gilt für jedes $F \in W$, weil es sich ja um einen maximalen Filter handelt, daß $\neg a \in F$, gdw $a \notin F$, daß also $F \in \rho(\neg a)$, gdw $F \notin \rho(a)$ ist; es folgt $\rho(\neg a) = \complement \rho(a)$.

Weiter ist offenbar $\rho(0) = \emptyset$ und $\rho(1) = V$. Es folgt, daß ρ ein Homomorphismus ist.

Es verbleibt zu zeigen, daß ρ injektiv ist. Es seien also $a, b \in A$ verschiedene Elemente; man darf annehmen, indem man ggf. a mit b vertauscht, daß $a \not\leq b$. Dann gibt es gemäß Lemma 3.13(ii) einen maximalen Filter F, der a, jedoch nicht b enthält. Also ist $F \in \rho(a)$, jedoch $F \notin \rho(b)$, d.h. insbesondere $\rho(a) \neq \rho(b)$. □

3.4 Vollständigkeit

Satz 3.15 *Der Kalkül* **KL** *ist bezüglich* $(\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}, \models_{TmA})$ *vollständig.*

Beweis. Gemäß Satz 3.14 ist die von den Teilmengenalgebren erzeugte Varietät diejenige der booleschen Algebra. Also folgt die Behauptung aus Satz 2.24. □

Für **KL** gilt sogar starke Vollständigkeit. Um diese zu zeigen, müssen wir anders vorgehen als im Fall des vorstehenden Satzes 3.15.

Definition 3.16 Es sei $\mathcal{L}$ eine Aussagensprache, $\mathbf{C}$ ein $\mathcal{L}$-Kalkül und Φ eine $\mathcal{L}$-Theorie. Wir setzen $\alpha \sim_\Phi \beta$ im Fall $\Phi \vdash \alpha \to \beta$ und $\Phi \vdash \beta \to \alpha$. Weiter sei $[\alpha]_\Phi = \{\beta \colon \alpha \sim_\Phi \beta\}$ und $\mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi) = \{[\alpha]_\Phi \colon \alpha \in \mathcal{P}_\mathcal{L}\}$. $\mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi)$, ausgestattet mit den von den Verknüpfungen induzierten Operationen, heiße *die zur Theorie* Φ *gehörige Lindenbaumalgebra* von $\mathbf{C}$.

Wir nennen diejenige boolesche Algebra, die aus nur einem Element besteht - was bedeutet, daß 0 und 1 zusammenfallen -, die *triviale* boolesche Algebra.

Lemma 3.17 *Es sei* $\mathcal{L}$ *eine Aussagensprache,* $\mathbf{C}$ *ein* $\mathcal{L}$*-Kalkül und* Φ *eine* $\mathcal{L}$*-Theorie. Dann ist* $(\mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi); \wedge, \vee, \neg, [0]_\Phi, [1]_\Phi)$ *eine boolesche Algebra, die genau dann die triviale ist, wenn* Φ *inkonsistent ist.*

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{A}(\mathbf{C}) \to \mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi), \;\; [\alpha] \mapsto [\alpha]_\Phi$ ist offensichtlich wohldefiniert und ein Homomorphismus. Insbesondere ist mit $\mathcal{A}(\mathbf{C})$ auch $\mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi)$ eine boolesche Algebra.

Weiter ist Φ inkonsistent, gdw $\Phi \vdash 0$, gdw $0 \sim_\Phi 1$, gdw $\mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi)$ die triviale boolesche Algebra ist. $\square$

Satz 3.18 *Der Kalkül* **KL** *ist bezüglich* $(\mathcal{L}_{\mathbf{KL}}, \models_{TmA})$ *stark vollständig.*

Beweis. Es sei Φ eine $\mathcal{L}$-Theorie. Klarerweise folgt aus $\Phi \vdash \alpha$ auch $\Phi \models_{TmA} \alpha$.

Es gelte $\Phi \nvdash \alpha$. Dann ist $[\alpha]_\Phi \not\sim_\Phi [1]_\Phi$, und insbesondere kann Φ nicht inkonsistent sein. Also ist unter der Belegung $v \colon \mathcal{P}_{\mathbf{KL}} \to \mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi), \;\; \xi \mapsto [\xi]_\Phi$ jedes $\varphi \in \Phi$ gültig, jedoch $v(\alpha) < [1]_\Phi$. Da $\mathcal{A}(\mathbf{C}_\Phi)$ zu einer Teilmengenalgebra isomorph ist, folgt die Behauptung. $\square$

4 Die Standard-Fuzzyaussagenlogik

4.1 Ansatz

Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß wir ein System analysieren wollen, das Zustände annehmen kann, die nicht mittels scharfer Aussagen spezifiziert werden können, sondern lediglich mittels vager. Vorgabe ist damit, daß unsere Aussagenmenge ein System von Fuzzymengen ist.

Wir erinnern an das typisches Beispiel: die Lage eines Gegenstandes im Raum. Formalisiert werden nicht mehr nur Aussagen der Form „Der Gegenstand liegt innerhalb einer Kugel des Radius r um den Punkt P“, sondern auch allgemeinere der Form „Der Gegenstand liegt in der Gegend des Punktes P“ oder etwas spezifischer „Der Gegenstand liegt im Raumbereich ρ“, worin $\rho\colon R^3 \to [0,1]$ eine um den Punkt P herum konzentrierte Fuzzymenge darstellt.

Definition 4.1 *Es sei W eine Menge. Eine Fuzzymenge über W ist eine Abbildung $u\colon W \to [0,1]$, worin $[0,1]$ das reelle Einheitsintervall darstellt.*

Für Fuzzymengen $u, v\colon W \to [0,1]$ sei

$$u \leq v, \text{ falls } u(w) \leq v(w) \text{ für alle } w \in W.$$

Zudem setzen wir

$$\begin{aligned} \bar{0}\colon \quad & W \to [0,1], \quad && w \mapsto 0, \\ \bar{1}\colon \quad & W \to [0,1], \quad && w \mapsto 1. \end{aligned}$$

Wir setzen im weiteren immer voraus, daß ein System von Fuzzymengen unter den punktweise ausgeführten Operationen min und max abgeschlossen ist sowie die konstant auf 0 und 1 abbildenden Fuzzymengen enthält. Wie im Fall der klassischen Aussagenlogik haben wir es dadurch mit einem Verband mit 0 und 1 zu tun.

Lemma 4.2 *Es sei A ein unter der punktweisen Bildung von Minimum und Maximum abgeschlossenes sowie $\bar{0}$ und $\bar{1}$ enthaltendes System von*

Fuzzymengen über einer Menge W. Dann gilt

$$\begin{aligned} v \wedge w\colon \quad & W \to [0,1], \quad && w \mapsto \ \min\,\{v(w), w(w)\}, \\ v \vee w\colon \quad & W \to [0,1], \quad && w \mapsto \ \max\,\{v(w), w(w)\}, \end{aligned}$$

und $(A; \wedge, \vee, \bar{0}, \bar{1})$ *ist ein distributiver Verband mit 0 und 1.*

Die zentrale Frage der Theorie der Fuzzymengen ist, wie zwei Fuzzymengen sinnvoll zu einer dritten zusammengefaßt werden können, die die Funktion hat, die Information beider zu enthalten - m.a.W. wie man auf einem System von Fuzzymengen eine Konjunktion einführen kann. Eine klare Antwort hierauf existiert nicht, weswegen man sich an die folgenden Vorgaben hält.

- Die Konjunktion $\alpha \odot \beta$ zweier Fuzzymengen $\alpha, \beta\colon W \to [0,1]$ sei punktweise erklärt. D.h. wir setzen

  $$(u \odot v)(w) = u(w) \odot v(w), \quad w \in W, \tag{13}$$

  und haben dann nur noch eine Funktion $\odot\colon\ [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ festzulegen.

- Diese letztere Operation $\odot$ auf dem reellen Einheitsintervall soll eine stetige t-Norm sein. M.a.W. fordern wir, (i) daß unser System von Fuzzymengen ein residuierter Verband ist und (ii) daß die Konjunktion $\odot$ an jedem Punktepaar stetig ist.

Dies läßt natürlich immer noch erheblichen Freiraum bei der Wahl der Konjunktion. Die Implikation dagegen ist an die Konjunktion gekoppelt, gemäß der Definition eines residuierten Verbandes.

Definition 4.3 Eine Funktion $\odot :\ [0,1]^2 \to [0,1]$ heiße *t-Norm*, falls sie kommutativ, assoziativ und in beiden Variablen monoton ist und 1 bezüglich ihrer ein Neutrales ist. Eine t-Norm heiße *stetig*, falls sie dies bezüglich der gewöhnlichen Topologien ist.

Es sei $\odot :\ [0,1]^2 \to [0,1]$ eine t-Norm; zu jedem Paar $a, b \in [0,1]$ existiere ein größtes $x \in [0,1]$ mit der Eigenschaft $x \odot a \leq b$. Dann heiße die Funktion

$$\to\colon\ [0,1]^2 \to [0,1], \quad (a,b) \mapsto \ \max\,\{x \in [0,1]\colon\ x \odot a \leq b\}$$

das zu $\odot$ gehörige *Residuum*. Wir bezeichnen dann die Algebra

$$([0,1];\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1),$$

worin $\wedge,\vee$ das Minimum bzw. Maximum darstellen, als die auf der t-Norm $\odot$ beruhende *Wahrheitswertealgebra.*

t-Norm-Algebren sind also nicht anderes als residuierte Verbände mit dem natürlich geordneten reellen Einheitsintervall $[0,1]$ als Grundbereich.

Nicht für alle t-Normen läßt sich ein Residuum definieren, wohl aber für alle stetigen.

Satz 4.4 *Eine t-Norm besitzt genau dann ein Residuum, wenn sie in einer ihrer Variablen linksseitig stetig ist.*

Beweis. Da $\odot$ kommutativ ist, ist $\odot$ in der ersten Variable linksseitig stetig, gdw dies für die zweite Variable gilt.

Ist $\odot$ in der ersten Variable linksseitig stetig, ist $a,b\in[0,1]$ und $c=\bigvee\{x\in[0,1]\colon\ x\odot a\le b\}$, so folgt $c\odot a\le b$, womit $a\rightarrow b$ existiert.

Existiert die Residuumsfunktion, ist $a,a_1,a_2,\dots,b\in[0,1]$ mit $a=\bigvee a_i$, so ist $\max\{x\colon\ x\odot b\le\bigvee_i(a_i\odot b)\}\ge a$ und wegen der Monotonie von $\odot$ folglich $\bigvee_i(a_i\odot b)\le a\odot b\le\bigvee_i(a_i\odot b)$, d.h. $\bigvee_i(a_i\odot b)=\bigvee a_i\odot b$. Also ist für jedes feste b die Funktion $\cdot\odot b$ linksseitig stetig. □

Bevor wir zur Definition der Fuzzylogik übergehen, bringen wir noch die Standardbeispiele für t-Normen.

Beispiel 4.5 Typische Beispiele für t-Normen sind die folgenden. Die *Łukasiewiczsche* t-Norm $\odot$ und das zugehörige Residuum $\rightarrow$ sind definiert gemäß

$$\begin{aligned}\odot\colon\ &[0,1]^2\rightarrow[0,1],\ \ (a,b)\mapsto\ \max\{a+b-1,0\},\\ \rightarrow\colon\ &[0,1]^2\rightarrow[0,1],\ \ (a,b)\mapsto\ \min\{1-a+b,1\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Des weiteren ist

$$\begin{aligned}\odot\colon\ &[0,1]^2\rightarrow[0,1],\ \ (a,b)\mapsto ab,\\ \rightarrow\colon\ &[0,1]^2\rightarrow[0,1],\ \ (a,b)\mapsto\begin{cases}\frac{b}{a} & \text{für } a\ge b,\\ 1 & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}\tag{15}$$

die *Produkt*-t-Norm mit Residuum. Und schließlich ist

$$\begin{aligned} \odot\colon\ [0,1]^2 \to [0,1],\ \ (a,b) &\mapsto \ \min\{a,b\}, \\ \to\colon\ [0,1]^2 \to [0,1],\ \ (a,b) &\mapsto \begin{cases} b & \text{für } a \geq b, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

die *gödelsche* t-Norm mit Residuum. Wir bezeichnen dann $([0,1]; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ als *łukasiewiczsche*, *Produkt*- bzw. *gödelsche Wahrheitswertealgebra*.

Aus diesen grundlegenden Beispielen lassen sich mit folgener Methode weitere t-Normen erzeugen. Daß es sich dabei bereits um den allgemeinsten Fall handelt, wird erst am Ende der Ausführungen über **BL** klar sein können.

Beispiel 4.6 Es seien I_ι, $\iota \in K$, paarweise disjunkte in $[0,1]$ liegende Intervalle, deren jedes entweder von der Form $I_\iota = [l_\iota, r_\iota)$ oder $I_\iota = (l_\iota, r_\iota)$ für gewisse $l_\iota, r_\iota \in [0,1]$, $l_\iota < r_\iota$, sei. Weiter seien h_ι ordnungserhaltende Homöomorphismen von I_ι nach $[0,1)$ bzw. nach $(0,1)$.

Dann sei $\odot\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ wie folgt erklärt. Es sei $a, b \in [0,1]$. Liegen für ein $\iota \in K$ sowohl a als auch b im Intervall I_ι und ist I_ι nach links abgeschlossen, sei $a \odot b = h_\iota^{-1}(h_\iota(a) \odot_L h_\iota(b))$, worin $\odot_L$ die łukasiewiczsche t-Norm sei. Liegen für ein $\iota \in K$ a wie b in I_ι und ist I_ι offen, sei $a \odot b = h_\iota^{-1}(h_\iota(a) \odot_P h_\iota(b))$, worin $\odot_P$ die Produkt-t-Norm sei. In den übrigen Fällen sei $a \odot b = \min\{a,b\}$.

Wie man überprüfen mag, ist dann $\odot$ wiederum eine t-Norm.

Wir definieren Fuzzylogik nun wie folgt auf der Grundlage von Systemen von Fuzzymengen.

Definition 4.7 Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}$ bestehe aus den Verknüpfungen $\odot$ und $\to$ sowie der Konstanten 0. Es bezeichne $\mathcal{P}_{\mathbf{BL}} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}}$ die Menge der $\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}$-Aussagen.

Es sei *FmA* die Klasse aller Algebren $(A; \odot, \to, \bar{0})$, worin A ein unter einer stetigen t-Norm $\odot$ sowie dem zu $\odot$ gehörigen Residuum $\to$ abgeschlossenes sowie die Fuzzynull enthaltendes System von Fuzzymengen über einer nichtleeren Menge ist, $\odot$ und $\to$ die jeweiligen punktweise ausgeführten Operationen bezeichnen und $\bar{0}$ die Fuzzynull ist.

$(\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}, \models_{FmA})$ ist die *Standard-Fuzzyaussagenlogik [Basic Logic].*

Satz 4.8 *Die Standard-Fuzzyaussagenlogik ist wahrheitswertebasiert.*

Sie stimmt mit der Aussagenlogik $(\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}, \models_{tNA})$ *überein, worin tNA die Menge aller t-Norm-Algebren bezeichnet.*

Beweis. Jedes System von Fuzzymengen ist Unteralgebra eines direkten Produktes von t-Norm-Algebren. □

Die Standard-Fuzzyaussagenlogik ist also die Logik stetiger t-Normen. Man kann natürlich ebensogut Fuzzylogiken auf der Grundlage jeweils einer drei genannten Standard-t-Normen definieren; dies ergibt die łukasiewiczsche, die Produkt- bzw. die gödelsche Fuzzyaussagenlogik. Wir werden diese später als gegenüber der jetzt definierten stärkere Logiken kennenlernen.

4.2 Der Kalkül der Standard-Fuzzyaussagenlogik

Wir definieren nun einen Beweiskalkül für die Logik der stetigen t-Normen.

Definition 4.9 Der *Kalkül der Standard-Fuzzyaussagenlogik* **BL** ist der $\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}$-Kalkül, der aus den Axiomenschemata

(F1) $[(\alpha \to \beta) \odot (\beta \to \gamma)] \to (\alpha \to \gamma)$,

(F2a) $\alpha \odot \beta \to \alpha$,
(F2b) $\alpha \odot \beta \to \beta$,

(F3) $\alpha \odot \beta \to \beta \odot \alpha$,

(F4) $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to [\beta \odot (\beta \to \alpha)]$,

(F5a) $[(\alpha \odot \beta) \to \gamma] \to [\alpha \to (\beta \to \gamma)]$, (F5b) $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \odot \beta) \to \gamma]$,

(F6) $0 \to \alpha$,

(F7) $[((\alpha \to \beta) \to \gamma) \odot ((\beta \to \alpha) \to \gamma)] \to \gamma$.

besteht sowie der Regel *Modus ponens*

$$\text{(MP)} \quad \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}.$$

Wiederum schreiben wir im weiteren einfach $\vdash$ statt $\vdash_{\mathbf{BL}}$.

Die Beweisregeln von **BL** sind recht gut mit denen von **KL** vergleichbar, wenn man $\odot$ als das Analogon von $\wedge$ betrachtet. Es seien die Unterschiede kurz skizziert.

Zum ersten ist $\alpha \odot \beta$ nicht mehr notwendig die schwächste α und β implizierende Aussage. Eine solche zu definieren ist allerdings möglich, es handelt sich um den Ausdruck $\alpha \odot (\alpha \to \beta)$ – s. nachfolgende Definition 4.10. Daß dieser Ausdruck tatsächlich die Funktion eines Infimums hat, ist die Folge des neuen Axioms (F4), dessen Sinn ansonsten nicht weiter begründbar ist.

Zum zweiten enthält die Sprache von **BL** keine Negation im eigentlichen Sinne. In derselben Weise wie in **KL** führt man zwar $\neg\alpha$ ein – s. Definition 4.10. Die neue Verknüpfung ist im Unterschied zu **KL** jedoch im allgemeinen nicht involutiv. Fordert man dies, gelangt man zum Kalkül der łukasiewiczschen Logik.

Dem entspricht, daß wie in der intuitionistischen Logik das *Tertium non datur* (K7) nicht gefordert ist. Dies hat hier jedoch in der mehrwertigen Logik keinen sonderlich tiefgreifenden Hintergrund; es muß eben nicht notwendig ein Wahrheitswert a entweder selbst oder die wie auch immer erklärte Negation von a den Wert 1 haben. Fordert man (K7), gelangt man gerade zur Logik **KL**, die Identifizierung von $\odot$ mit $\wedge$ vorausgesetzt.

Auf der anderen Seite ist in **BL** das Axiom (F7) neu und darf als abgeschwächte Form des *Tertium non datur* angesehen werden. (F7) reflektiert den Umstand, daß die Standard-Fuzzyaussagenlogik wahrheitswertebasiert ist; einen tieferen Sinn in (F7) zu finden ist ansonsten ähnlich schlecht möglich wie im Fall von (F4).

Neben der Konjunktion und Implikation lassen sich auch in diesem Kalkül etliche weitere Verknüpfungen definieren. Wiederum handelt es sich formal nur um Abkürzungen. Wir werden noch zeigen, daß die Bedeutung der definierten Verknüpfungen ihrer Notation entspricht.

Definition 4.10 In **BL** stehe

$$\begin{array}{rll} \alpha \wedge \beta & \text{für} & \alpha \odot (\alpha \to \beta), \\ \alpha \vee \beta & \text{für} & [(\alpha \to \beta) \to \beta] \wedge [(\beta \to \alpha) \to \alpha], \\ \neg\alpha & \text{für} & \alpha \to 0, \\ 1 & \text{für} & \neg 0, \\ \alpha \leftrightarrow \beta & \text{für} & (\alpha \to \beta) \odot (\beta \to \alpha). \end{array} \tag{17}$$

Wir stellen wiederum als erstes die Korrektheit fest.

Lemma 4.11 **BL** *ist bezüglich* $(\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}, \models_{FmA})$*, d.h. der Standard-Fuzzyaussagenlogik, korrekt.*

Beweis. Wir verwenden wiederum den Satz 2.16. Aufgrund des Satzes 4.8 genügt es, die Gültigkeit der Axiome sowie den Erhalt der Gültigkeit unter (MP) für Belegungen mit Werten aus beliebigen t-Norm-Algebren zu überprüfen. □

Wir beweisen nun der Reihe nach etliche elementare Eigenschaften von **BL**, die Bestimmung der Lindenbaumalgebra vorbereitend.

Lemma 4.12 *In* **BL** *gilt folgendes.*

(i) $\vdash \alpha \to \alpha$.

Aus $\vdash \alpha$ *und* $\vdash \beta$ *folgt* $\vdash \alpha \odot \beta$.

(ii) $\vdash (\alpha \odot \beta) \odot \gamma \to \alpha \odot (\beta \odot \gamma)$;

$\vdash \alpha \odot \beta \to \beta \odot \alpha$;

$\vdash \alpha \to \alpha \odot 1$.

(iii) $\vdash (\alpha \to \beta) \to [(\gamma \odot \alpha) \to (\gamma \odot \beta)]$.

Beweis. (i) Es sei ξ eine beliebige beweisbare Aussage. Es gilt $(\xi \odot \alpha) \to \alpha$, also $\xi \to (\alpha \to \alpha)$ und damit $\alpha \to \alpha$.

Aus $(\alpha \odot \beta) \to (\alpha \odot \beta)$ folgt $\alpha \to (\beta \to (\alpha \odot \beta))$. Sind α und β beweisbar, folgt $\alpha \odot \beta$.

(ii) Die zweite Behauptung gilt gemäß (F3).

$[(\alpha \odot \beta) \odot \gamma] \to [(\alpha \odot \beta) \odot \gamma]$ läßt sich umschreiben nach $\alpha \to (\beta \to (\gamma \to [(\alpha \odot \beta) \odot \gamma])))$ und weiter nach $[\alpha \odot (\beta \odot \gamma)] \to [(\alpha \odot \beta) \odot \gamma]$.

Aus $(1 \odot \alpha) \to (1 \odot \alpha)$ folgt $1 \to (\alpha \to (1 \odot \alpha)$, und da 1 nach (i) beweisbar ist, gilt $\alpha \to (1 \odot \alpha)$.

(iii) Aus $\gamma \odot \beta \to \gamma \odot \beta$ folgt $\gamma \to (\beta \to \gamma \odot \beta)$, woraus $\gamma \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma \odot \beta)]$ und weiter $(\alpha \to \beta) \to [\gamma \to (\alpha \to \gamma \odot \beta)]$ ableitbar ist. Es folgt $(\alpha \to \beta) \to [(\gamma \odot \alpha) \to (\gamma \odot \beta)]$. □

Es folgt ein Lemma, das erstens die grundlegenden Eigenschaften der $\to$-Verknüpfung enthält. Zweitens zeigt es, daß das Infimum zweier Aussagen die schwächste Aussage ist, die die Teilaussagen impliziert. Analog wird drittens bewiesen, daß das Supremum zweier Aussagen die stärkste Aussage ist, die von beiden Teilaussagen impliziert wird.

Lemma 4.13 *In* **BL** *gilt das folgende.*

(i) $\vdash 0 \to \alpha$ *und* $\vdash \alpha \to 1$

(ii) *Aus* $\vdash \alpha \to \beta$ *und* $\vdash \beta \to \gamma$ *folgt* $\vdash \alpha \to \gamma$.

(iii) $\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$ *und* $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$.

(iv) *Aus* $\vdash \gamma \to \alpha$ *und* $\vdash \gamma \to \beta$ *folgt* $\vdash \gamma \to \alpha \wedge \beta$.

(v) $\vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$ *und* $\vdash \beta \to \alpha \vee \beta$.

(vi) *Aus* $\vdash \alpha \to \gamma$ *und* $\vdash \beta \to \gamma$ *folgt* $\alpha \vee \beta \to \gamma$.

Beweis. (i) $0 \to \alpha$ gilt gemäß (F5).

Aus $0 \to (\alpha \to 0)$ folgt $(0 \odot \alpha) \to 0$, daher $(\alpha \odot 0) \to 0$ und $\alpha \to (0 \to 0)$, d.h. $\alpha \to 1$.

(ii) Dies folgt mithilfe von Lemma 4.12(i) aus (F1).

(iii) Nach (F2) gilt $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to \alpha$.

Aus $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to [\beta \odot (\beta \to \alpha)]$ und $[\beta \odot (\beta \to \alpha)] \to \beta$ folgt $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to \beta$.

(iv) Es sei $\gamma \to \alpha$ und $\gamma \to \beta$ beweisbar. Aus $[(\alpha \to \gamma) \odot (\gamma \to \beta)] \to (\alpha \to \beta)$ folgt dann $(\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)$ und weiter mittels Lemma 4.12(iii) $[\alpha \odot (\alpha \to \gamma] \to (\alpha \wedge \beta)$. Mittels (F4) wird $[\gamma \odot (\gamma \to \alpha)] \to (\alpha \wedge \beta)$ und weiter $\gamma \to (\alpha \wedge \beta)$.

(v) Wie leicht ersichtlich, ist $\alpha \to [(\alpha \to \beta) \to \beta]$ und $\alpha \to [(\beta \to \alpha) \to \alpha]$ beweisbar; es folgt gemäß (iv) $\alpha \to \alpha \vee \beta$. In ähnlicher Weise folgt $\beta \to \alpha \vee \beta$.

(vi) Es sei $\alpha \to \gamma$ und $\beta \to \gamma$ beweisbar. Aus (F5) und (F3) folgt $(\alpha \to \beta) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta]$ und damit $(\alpha \to \beta) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma]$. Also gilt auch $(\alpha \to \beta) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \wedge ((\beta \to \alpha) \to \alpha) \to \gamma]$, das heißt $(\alpha \to \beta) \to [(\alpha \vee \beta) \to \gamma]$. In analoger Weise folgt $(\beta \to \alpha) \to [(\alpha \vee \beta) \to \gamma]$ und insgesamt aufgrund von (F7) $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$.

□

Das folgende Lemma zeigt eine der „Schwächen" der Logik **BL**. Wohl kann man von $\alpha \to \beta$ auf $\neg\beta \to \neg\alpha$ schließen, aber nicht umgekehrt. Denn aus letzterem folgt weiter $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$, und mit $\alpha \to \neg\neg\alpha$ ergibt sich $\alpha \to \neg\neg\beta$. Von $\neg\neg\beta$ kann jedoch nicht auf β geschlossen werden, wie man sich etwa am Beispiel der Produktlogik klarmachen kann.

Lemma 4.14 *In* **BL** *gilt: Aus* $\vdash \alpha \to \beta$ *folgt* $\vdash \neg\beta \to \neg\alpha$.

Beweis. Dies folgt aus $(\alpha \to \beta) \odot (\beta \to 0) \to (\alpha \to 0)$. □

Wir bestimmen schließlich die Lindenbaumalgebra von **BL**, definierbar aufgrund des nachfolgenden Lemmas, für das wir nichts mehr zu zeigen brauchen.

Lemma 4.15 **BL** *ist implikativ.*

Also können wir gemäß Definition 2.20 auf $\mathcal{A}(\mathbf{BL}) = \{[\alpha] : \alpha \in \mathcal{P}_{\mathbf{BL}}\}$ definieren:

$$[\alpha] \odot [\beta] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \odot \beta],$$

$$
\begin{aligned}
[\alpha] \to [\beta] \quad &\stackrel{\text{def}}{=} \quad [\alpha \to \beta], \\
\mathbf{0} \quad &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \{\alpha\colon \alpha \sim_{\mathbf{BL}} 0\};
\end{aligned}
$$

in derselben Weise induzieren alle durch (17) definierten Verknüpfungen Operationen auf $\mathcal{A}(\mathbf{BL})$. Und $\mathcal{A}(\mathbf{BL})$ ist durch

$$[\alpha] \leq [\beta], \quad \text{falls} \quad \vdash \alpha \to \beta$$

partiell geordnet.

Definition 4.16 Ein residuierter Verband $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ ist eine *BL-Algebra*, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.

(Div) $a \wedge b = a \odot (a \to b)$ für $a, b \in A$.

(Prl) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ für $a, b \in A$.

Während die Axiome residuierter Verbände eine einfache Interpretation besitzen, läßt sich dasselbe nicht sagen über die BL-Algebren spezifizierenden. (Div) wird als *Teilbarkeit [divisibility]* bezeichnet, da es besagt, daß im Fall $b \leq a$ ein c mit $a \odot c = b$ vorhanden ist - $c = a \to b$ nämlich. (Prl) ist die *Prälinearität [prelinearity]*, welche sicherstellt, daß BL-Algebra durch linear geordnete darstellbar sind, wie unten gezeigt werden wird. Der Hintergrund der Axiome (Div) und (Prl) kann alternativ mit untenstehendem Satz 4.19 einsichtig gemacht werden, der eine alternative Definition der BL-Algebren.

Wir zeigen nun einige elementare Eigenschaften von BL-Algebren.

Gemäß dem folgendem Lemma ist die partielle Ordnung einer BL-Algebra durch die übrige Struktur bereits eindeutig festgelegt.

Lemma 4.17 *In BL-Algebren lassen sich für je zwei Elemente a, b deren Infimum wie Supremum mittels $\odot$ und $\to$ ausdrücken:*

$$
\begin{aligned}
a \wedge b \quad &= \quad a \odot (a \to b), \\
a \vee b \quad &= \quad [(a \to b) \to b] \wedge [(b \to a) \to a].
\end{aligned}
$$

Beweis. Die Formel fürs Infimum ist durch (Div) vorgegeben. Die fürs Supremum ist in analoger Weise wie Lemma 4.13 zu beweisen. $\square$

Definition 4.18 Es sei $(A; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ ein residuierter Verband.

(i) $\odot$ heiße *mit den Verbandsoperationen kompatibel*, falls

$$a \odot (b \wedge c) = (a \odot b) \wedge (a \odot c), \tag{18}$$
$$a \odot (b \vee c) = (a \odot b) \vee (a \odot c) \tag{19}$$

für $a, b, c \in A$ gilt.

(ii) $\to$ heiße *mit den Verbandsoperationen kompatibel*, falls

$$a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c), \tag{20}$$
$$a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c), \tag{21}$$
$$(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c), \tag{22}$$
$$(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c) \tag{23}$$

für $a, b, c \in A$ gilt.

(iii) A heiße *natürlich geordnet [divisible]*, falls für $a, b \in A$

$$a \leq b, \quad \text{gdw} \quad a = b \odot x \quad \text{für ein } x \in L,$$

gilt.

Satz 4.19 *Ein residuierter Verband* $(A; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *ist eine BL-Algebra genau dann, wenn* $\odot$ *und* $\to$ *mit den Verbandsoperationen kompatibel sind und* A *natürlich geordnet ist.*

Beweis. (nur einer Richtung). Wir zeigen, daß die Eigenschaften (i), (ii), (iii) von Definition 4.18 in BL-Algebren erfüllt sind.

A sei also eine BL-Algebra. Aus (RV3) und der Kommutativität von $\odot$ folgt, daß $\odot$ in beiden Variablen monoton ist; aus (RV4) ist ersichtlich, daß $\to$ in der ersten Variable antiton und in der zweiten monoton ist.

Es sei $a, b, c \in A$. In Hinsicht auf Gleichung (19) ergibt sich, daß $a \odot b$, $a \odot c \leq a \odot (b \vee c)$. Ist weiter $a \odot b$, $a \odot c \leq x$, folgt aus der Residuationseigenschaft $b, c \leq a \to x$, also $b \vee c \leq a \to x$ und folglich $a \odot (b \vee c) \leq x$. Es folgt (19), und in ähnlicher Weise sind auch (20) und (23) herleitbar.

In Hinsicht auf Gleichung (21) ist des weiteren klar, daß $a \to b, a \to c \leq a \to (b \vee c)$. Es sei weiter $a \to b, a \to c \leq x$ für ein $x \in A$. Nach Definition ist $a \to (b \vee c) = \max\{y\colon a \odot y \leq b \vee c\}$; ist nun $a \odot y \leq b \vee c$, so $a \odot y \leq (b \to c) \to c$, also $y \odot (b \to c) \odot a \leq c$, was wiederum $y \odot (b \to c) \leq a \to c \leq x$ und weiter $b \to c \leq y \to x$ impliziert. Ähnlich folgt dann $c \to b \leq y \to x$ und wegen (Prl) $y \to x = 1$, das heißt $y \leq x$. Es folgt $a \to (b \vee c) \leq x$ und damit (21). In ähnlicher Weise sind (18) und (22) herleitbar.

Gilt schließlich für $a, b \in A$ $a \leq b$, so ist gemäß (Div) $a = a \wedge b = b \odot (b \to a)$. Weiter gilt für jedes $x \in A$ wegen (RV3) $a \odot x \leq a \odot 1 = a$. Es folgt, daß A natürlich geordnet ist. $\square$

Angemerkt sei ferner, daß der einer BL-Algebra unterliegende Verband in einem strengen Sinne distributiv ist.

Lemma 4.20 *Es sei* $(A; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *eine BL-Algebra. Dann gilt für* $a, b_\iota \in A$, $\iota \in I$

$$a \wedge \bigvee_\iota b_\iota = \bigvee_\iota (a \wedge b_\iota). \tag{24}$$

Ist A linear geordnet, gilt außerdem

$$a \vee \bigwedge_\iota b_\iota = \bigwedge_\iota (a \vee b_\iota), \tag{25}$$

sofern die jeweiligen Suprema und Infima existieren.

Beweis. Bemerkt sei zunächst, daß sich Gleichung (19) auf den Fall unendlicher Konjunktionen verallgemeinern läßt: Es gilt $a \odot \bigvee_\iota b_\iota = \bigvee_\iota (a \odot b_\iota)$. Der Beweis ist direkt übertragbar.

Nun zu (24). Es gilt $a \wedge \bigvee_\iota b_\iota = \bigvee_\iota b_\iota \odot (\bigvee_\iota b_\iota \to a) = \bigvee_\kappa (b_\kappa \odot (\bigvee_\iota b_\iota \to a)) \leq \bigvee_\kappa (b_\kappa \odot (b_\kappa \to a)) = \bigvee_\kappa (a \wedge b_\kappa)$. Umgekehrt gilt für jedes κ, daß $a \wedge b_\kappa \leq a \wedge \bigvee_\iota b_\iota$, also auch $\bigvee_\iota (a \wedge b_\iota) \leq a \wedge \bigvee_\iota b_\iota$. Damit ist (24) gezeigt.

Weiter sei A linear geordnet. Klarerweise gilt für jedes $\kappa \in I$ $a \vee \bigwedge_\iota b_\iota \leq a \vee b_\kappa$. Es sei $x \in A$ mit $x \leq a \vee b_\kappa$ für alle κ. Dann ist entweder $x \leq a$ oder sonst $x \leq b_\kappa$ für jedes κ, also dann $x \leq \bigwedge_\iota b_\iota$; es folgt $x \leq a \vee \bigwedge_\iota b_\iota$. Also gilt (25). $\square$

Im folgenden Lemma stehe a^n für das Element a und ein $n \geq 1$ für $\underbrace{a \odot \ldots \odot a}_{n\text{-mal}}$.

Lemma 4.21 *In BL-Algebren A gilt $(a \to b)^n \vee (b \to a)^n = 1$ für alle $a, b \in A$ und alle $n \geq 1$.*

Beweis. Für $n = 1$ ist dies (Prl). Die Behauptung folgt in ihrer Allgemeinheit, wenn gezeigt ist, daß mit $c \vee d = 1$ auch $(c \odot c) \vee d = 1$ für alle $c, d \in A$ gilt.

Angenommen sei also $c \vee d = 1$. Dann gilt nach Lemma 4.17 $(c \to d) \to d = (d \to c) \to c = 1$, d.h. $c \to d \leq d$ und $d \to c \leq c$. Zu zeigen ist $c \odot c \to d \leq d$ und $d \to c \odot c \leq c \odot c$.

Es ist $c \odot c \to d = c \to (c \to d) \leq c \to d \leq d$; dies ist die erste Ungleichung.

Weiter folgt aus $d \to c \leq c$, daß $(d \to c) \odot (d \to c) \leq c \odot c$, und weiter $d \to c \leq (d \to c) \to c \odot c \leq (d \to c \odot c) \to c \odot c$. Außerdem gilt $c \to d \leq d \leq (d \to c \odot c) \to c \odot c$. Da $(d \to c) \vee (c \to d) = 1$, folgt auch die zweite Ungleichung. □

Hingewiesen sei schließlich auf eine weitere Art der Formulierung der Axiome von BL-Algebren. Die BL-Algebren bilden eine Varietät; die Axiome lassen sich also sämtlichst als Gleichungen formulieren.

Satz 4.22 *Die Klasse der BL-Algebren ist eine Varietät.*

Beweis. Daß $(A; \wedge, \vee, 0, 1)$ ein Verband mit 0 und 1 ist, läßt sich gemäß Lema 2.2 als Gleichungen formulieren. Dies deckt (RV1) ab.

Die Bedingungen, daß $(A; \odot)$ ein Monoid mit Neutralem 1 ist, sind sämtlichst Gleichungen. Damit ist (RV2) abgedeckt.

Auch (Div) und (Prl) sind von sich aus schon Gleichungen.

Unter der Voraussetzung, daß (RV1) und (RV2) gelten, sind (RV3) und (RV4) zur Residuumseingeschaft (3) äquivalent. Es sei $a \wedge b \to b = 1$, $a \vee b \to b = a \to b$ und $a \odot b \to c = a \to (b \to c)$ jeweils Axiom. Dann läßt sich aus $a \leq b$ $a \to b = 1$ erschließen und aus $a \to b = 1$ mittels

(Div) $a = a \odot 1 = a \odot (a \to b) = a \wedge b \leq b$. Weiter gilt dann $a \odot b \leq c$, gdw $a \odot b \to c = 1$, gdw $a \to (b \to c) = 1$, gdw $a \leq b \to c$; also ist (3) beweisbar. $\square$

Wir können nun die Lindenbaumalgebren von **BL** charakterisieren, die, wie unsere Bezeichnungsweise bereits vermuten läßt, eine BL-Algebra darstellt. Die Algebra hat lediglich mehr Operationen als die Logik Verknüpfungen; die fehlenden gehen aber gemäß (4.10) aus den vorhandenen hervor.

Satz 4.23 *Es sei* $(\mathcal{A}(\mathbf{BL}); \odot, \to, \mathbf{0})$ *die Lindenbaumalgebra von* **BL**, *und* $\wedge$, $\vee$, 1 *seien die von den gemäß* (17) *erklärten Verknüpfungen induzierten Operationen auf* $\mathcal{A}(\mathbf{BL})$. *Dann ist* $(\mathcal{A}(\mathbf{BL}); \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ *eine BL-Algebra.*

Beweis. (RV1) zusammen mit (Div) und (Prl) ist wie folgt zu ersehen. Daß $\leq$ eine partielle Ordnung mit $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ als kleinstem und größtem Element ist, folgt aus den Lemmata 4.12(i) und 4.13(i)-(ii). Daß $\wedge$ und $\vee$ die Verbandsoperationen sind, folgt aus Lemma 4.13(iii)-(vi).

(RV2) gilt aufgrund Lemma 4.12(ii), (RV3) aufgrund Lemma 4.12(iii), (RV4) aufgrund (F5). $\square$

Wir erhalten damit unser Hauptresultat. Wir sprechen vom Redukt $(A; \odot, \to, 0)$ einer BL-Algebra wieder als einer BL-Algebra *(bis auf Definitionen).*

Satz 4.24 *Die zu* **BL** *gehörige Varietät ist (bis auf Definitionen) die aller BL-Algebren* $(A; \odot, \to, 0)$.

Insbesondere ist die Lindenbaumalgebra $(\mathcal{A}(\mathbf{BL}); \wedge, \to, \mathbf{0})$ *von* **BL** *die freie boolesche Algebra mit* $\aleph_0$ *Generatoren.*

Beweis. Wie im Fall von Satz 3.10. $\square$

4.3 Struktur von BL-Algebren

Die BL-Algebren gehören zu denjenigen Algebren, deren Struktur sich bis ins Kleinste aufschlüsseln läßt. Diese Struktur zu beschreiben ist allerdings recht aufwendig und erfordert es, recht weit auszuholen. Wir gehen schrittweise vor, und zwar in einer Weise, daß die zahlreichen Einzelergebnisse so präsentiert werden, daß von unabhängigem Wert sind.

Auch dieser algebraische Teil ist unabhängig vom Rest lesbar. Weitere Quelle für Informationen ist weiterhin das Buch [Haj1] sowie z.B. die Artikel [EGHM, AgMo].

Da der Kalkül **BL** für die Standard-Fuzzyaussagenlogik korrekt ist, ist ein grundlegendes Beispiel für BL-Algebren jedes System von Fuzzymengen aus *FmA*.

Beispiel 4.25 Beispiel einer BL-Algebra ist zunächst jede auf einer stetigen t-Norm beruhende Wahrheitswertealgebra $([0,1]; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$. Insbesondere kann $\odot$ hier die łukasiewiczsche, die Produkt- oder die gödelsche t-Norm sein; siehe Beispiel 4.5.

Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern auf Systeme von Fuzzymengen; auf einem solchen lassen sich gemäß (13) alle Operationen punktweise erklären.

Die umgekehrte Richtung gilt hier nicht; die Varietät Var(**BL**) aller BL-Algebren ist echt größer ist als die Klasse aller Algebren $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$, die durch Systeme von Fuzzymengen dargestellt werden können.

Unser Vorgehen ist das folgende:

- Zunächst zeigen wir, daß sich BL-Algebren aus linear geordneten BL-Algebren durch Produktbildung zusammensetzen lassen. Alles weitere braucht damit nur noch der Analyse linear geordneter BL-Algebren zu dienen.

- Wir schieben sodann die BL-Algebren selbst erst einmal beiseite rücken der Reihe nach zwei wichtige Unterklassen von BL-Algebren der Reihe nach in den Blickpunkt: (i) die MV-Algebren, die bekanntesten Algebren im Zusammenhang mit mehrwertiger Logik, welche eine angenehme Darstellungstheorie besitzen; und (ii) die Produktalgebren, deren Analyse ähnliche Techniken wir der der MV-Algebren zugrundeliegt.

- Schließlich zeigen wir, daß sich aus den beiden speziellen Algebrentypen linear geordnete BL-Algebren in gewissem Sinne vertikal zusammensetzen lassen - mittels der im Beispiel 4.6 schon erwähnte Konstruktion der ordinalen Summe.

4.3.1 Subdirekte Darstellung von BL-Algebren

Wenn man Algebren bestimmten Typs analysieren möchte, stellt sich im allgemeinen als erstes die Frage, ob sich die zu untersuchende Algebra aus einfacheren solchen zusammensetzen läßt. Speziell im Fall partiell geordneter Algebren ist zu prüfen, ob nicht jede solche Algebra das Produkt linear geordneter ist oder wenigstens Unteralgebra eines solchen Produktes. Für BL-Algebren trifft dies letztere in der Tat zu, so daß alle weitere Analyse auf linear geordnete Strukturen reduzierbar ist.

Wenn nun eine BL-Algebra A das Produkt linear geordneter solche ist, sollten sich die letzteren nach dem folgenden Prinzip rekonstruieren lassen. Man bestimmt zunächst diejenigen Teilmengen von A zu finden, die in einer der Faktoralgebren stets den Wert 1 haben; diese Eigenschaft haben die Primfilter, die der Gegenstand der nachstehenden Definition sind. Bildet man dann den Quotienten von A bezüglich eines Primfilters, erhält man die korrespondierende linear geordnete BL-algebra.

Definition 4.26 Es sei $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ eine BL-Algebra.

(i) Eine Teilmenge F von A heiße *Filter*, falls (α) aus $a \in F$ und $a \leq b$ folgt, daß auch $b \in F$ ist, und (β) aus $a, b \in F$ folgt, daß auch $a \odot b \in F$ ist.

Ein Filter F von A heiße *Primfilter*, falls für je zwei $a, b \in A$ entweder $a \rightarrow b \in F$ oder $b \rightarrow a \in F$ ist.

(ii) Es sei F ein Filter von A. Dann sei für je zwei $a, b \in A$

$$a \sim_F b \quad \text{im Fall} \quad a \rightarrow b,\, b \rightarrow a \;\in\; F$$

gesetzt. Wir schreiben $[a]_F = \{b \in A \colon\, b \sim_F a\}$ und $[A]_F = \{[a]_F \colon a \in A\}$; letztere Menge heiße der *Quotient* von A bezüglich F.

Lemma 4.27 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine BL-Algebra, und es sei* F *ein Filter. Dann ist* $\sim_F$ *eine mit* $\odot$ *und* $\rightarrow$ *kompatible Äquivalenzrelation. Weiter ist der Quotient* $[A]_F$ *von* A *bezüglich* F*, zusammen mit der induzierten Relation* $\leq$*, den induzierten Operationen* $\odot$ *und* $\rightarrow$ *und den Konstanten* $[0]_F$ *und* $[1]_F$*, wiederum eine BL-Algebra.*

Ist dabei F *ein Primfilter, ist diese BL-Algebra linear geordnet.*

Beweis. Es gilt $a \sim_F a$, da 1 in jedem Filter enthalten ist, und es folgt konstruktionsbedingt aus $a \sim_F b$ auch $b \sim_F a$. Aus $a \sim_F b$ und $b \sim_F c$ folgt $a \sim_F c$, weil $a \rightarrow c \geq (a \rightarrow b) \odot (b \rightarrow c) \in F$, also $a \rightarrow c \in F$ und analog auch $c \rightarrow a \in F$ ist. Also ist $\sim_F$ eine Äquivalenzrelation.

Weiter impliziert $a' \rightarrow a$ aufgrund von (RV3) $a' \odot b \rightarrow a \odot b$. Es folgt, daß $\sim_F$ mit $\odot$ kompatibel ist. Ebenso ist aus Zusammenhängen wie $a' \rightarrow a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a' \rightarrow b)$ zu ersehen, daß $\sim_F$ auch mit $\rightarrow$ kompatibel ist.

Damit gelten alle Gleichungen, in denen $\odot$, $\rightarrow$, die Konstanten 0 und 1 und beliebige Elemente aus A vorkommen, dann, wenn sie in A gelten, nach Abbildung unter $A \rightarrow [A]_F,\ \ a \mapsto [a]_F$ auch in $[A]_F$. Es folgt aus Satz 4.24, daß auch $[A]_F; \leq', \odot, \rightarrow, 0, 1)$ eine BL-Algebra ist, wobei $[a] \leq' [b]$ gesetzt sei, falls $[a] = [a] \wedge [b]$.

Weiter gilt definitionsgemäß $[a]_F \leq [b]_F$, falls $a' \leq b'$ für gewisse $a' \sim_F a$ und $b' \sim_F b$. In diesem Fall ist $a' = a' \wedge b'$, und es folgt $[a]_F \leq' [b]_F$. Gilt $[a]_F \leq' [b]_F$, so ist $[a]_F = [a \wedge b]_F$, und es folgt $a \sim_F a \wedge b \leq b$, also $[a]_F \leq [b]_F$. Insgesamt ist also $\leq' = \leq$.

Ist nun F ein Primfilter und $a, b \in A$, so gilt entweder $a \rightarrow b \in F$ und folglich $[a]_F \rightarrow [b]_F = 1$, d.h. $[a]_F \leq [b]_F$; oder es gilt $b \rightarrow a \in F$ und folglich $[b]_F \leq [a]_F$. $\square$

Es ist hieraus bereits klar, daß eine BL-Algebra A im Produkt der Quotientenalgebren $[A]_F$, F Primfilter, mittels der Abbildungen $a \mapsto [a]_F$ darstellbar ist. Es wird nun gezeigt, daß diese Darstellung injektiv ist.

Lemma 4.28 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine BL-Algebra. Für jedes Element* $a < 1$ *von* A *gibt es einen* a *nicht enthaltenden Primfilter von* A*.*

Beweis. Es sei a ein von 1 verschiedenes Element von A. Dann ist die Menge $\{1\}$ ein a nicht enthaltender Filter. Unter all den Mengen mit dieser Eigenschaft gibt es laut Zornschem Lemma eine maximale, etwa F.

Angenommen sei, daß F kein Primfilter sei, daß also für gewisse $b, c \in A$ weder $b \to c$ noch $c \to b$ in F sei. Es sei $F_{b \to c} = \{x : x \geq (b \to c)^n \odot y$ für $y \in F,\ n \in N\}$ der von $b \to c$ und F erzeugte Filter und ähnlich auch $F_{c \to b}$ definiert. Nach Voraussetzung enthalten sowohl $F_{b \to c}$ als auch $F_{c \to b}$ a, womit $a \geq (b \to c)^{n_1} \odot y_1$ und $a \geq (c \to b)^{n_2} \odot y_2$ für gewisse $y_1, y_2 \in F$ und $n_1, n_2 \in N$ gilt. Mit $y = y_1 \odot y_2 \in F$ und $n = \max\{n_1, n_2\}$ folgt $a \geq [(b \to c)^n \odot y] \vee [(c \to b)^n \odot y] = [(b \to c)^n \vee (c \to b)^n] \odot y$. Weiter gilt gemäß Lemma 4.21 $(b \to c)^n \vee (c \to b)^n = 1$. Es folgt $a \geq y$ und damit $a \in F$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist F ein Primfilter. □

Definition 4.29 Es seien $(A_\iota; \leq_\iota, \odot_\iota, \to_\iota, 0_\iota, 1_\iota)$, $\iota \in I$, BL-Algebren. Es sei

$$A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$$

das kartesische Produkt der Grundmengen der einzelnen Algebren, versehen mit der folgenden Struktur. A sei gemäß

$$(a_\iota)_\iota \leq (b_\iota)_\iota \text{ im Fall } a_\iota \leq b_\iota \text{ für alle } \iota$$

partiell geordnet; es seien $\odot$ und $\to$ auf A gemäß

$$\begin{aligned} (a_\iota)_\iota \odot (b_\iota)_\iota &\stackrel{\text{def}}{=} (a_\iota \odot b_\iota)_\iota, \\ (a_\iota)_\iota \to (b_\iota)_\iota &\stackrel{\text{def}}{=} (a_\iota \to b_\iota)_\iota \end{aligned}$$

erklärt sowie $0 \stackrel{\text{def}}{=} (0_\iota)_\iota$ und $1 \stackrel{\text{def}}{=} (1_\iota)_\iota$ gesetzt. Dann heiße $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ das *direkte Produkt* der Algebren A_ι, $\iota \in I$.

Weiter sei A' eine BL-Subalgebra von $\prod_{\iota \in I} A_\iota$; dabei seien die Abbildungen $\pi_\lambda : A' \to A_\iota$, $(a_\iota)_\iota \mapsto a_\lambda$ für alle λ surjektiv. Dann heiße A' *subdirektes Produkt* der BL-Algebren A_ι, $\iota \in I$.

Satz 4.30 *Jede BL-Algebra* $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ *ist subdirektes Produkt linear geordneter BL-Algebren.*

Beweis. Es seien F_ι, $\iota \in I$, sämtliche Primfilter von A, und es sei für jedes $\iota \in I$ $A_\iota = [A]_{F_\iota}$, d.h. die Quotientenalgebra von A bezüglich des Filters F_ι. Es sei

$$\rho\colon\ A \to \prod_\iota A_\iota, \quad a \mapsto ([a]_{F_\iota})_\iota.$$

Dann ist ρ offensichtlich ein Homomorphismus. Ist weiter $a \neq b$, so ist entweder $a \to b$ oder $b \to a$ von 1 verschieden; trifft etwa ersteres zu, ist gibt es gemäß Lemma 4.28 einen Primfilter F mit $[a \to b]_F < [1]_F$, womit $[a]_F$ von $[b]_F$ verschieden ist; im Fall $b \to a < 1$ kann ähnlich argumentiert werden. Es folgt, daß ρ injektiv ist.

Also ist A Subalgebra des direkten Produktes der A_ι, und daß es sich um ein subdirektes Produkt handelt, folgt konstruktionsgemäß. □

4.3.2 Darstellung von MV-Algebren

Wir wenden uns jetzt der bekanntesten Teilklassen der BL-Algebren zu, den MV-Algebren. Es handelt sich bei diesen um die Lindenbaumalgebren der łukasiewiczschen Logik, einer Logik, die bereits in den 30er Jahren des vergangenen Jahrhunderts entworfen worden ist. Diese heute wohl am weitesten verbreitete Logik selbst wird aus praktischen Gründen erst im Abschnitt 5 vorgestellt. Für weitergehende Informationen verweisen wir auf das Buch [COM].

Definition 4.31 Eine BL-Algebra $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ heiße *MV-Algebra*, falls

(MV) $\neg\neg a = a$ für alle $a \in A$

gilt.

Ist A also eine MV-Algebra, ist $\neg$ eine Komplementfunktion auf der partiell geordneten Menge $(A; \leq)$: $\neg$ ist involutiv, und es gilt $a \leq b$, gdw $\neg b \leq \neg a$, für alle $a, b \in A$.

Das prototypische Beispiel ist in Beispiel 4.25 enthalten: Ein System von Fuzzymengen zusammen mit der punktweise ausgeführten łukasiewiczschen t-Norm und zugehörigem Residuum ist eine MV-Algebra.

Lemma 4.32 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine MV-Algebra. Es gilt für* $a, b \in A$

$$\begin{aligned} a \rightarrow b &= \neg(a \odot \neg b), & (26)\\ a \odot b &= \neg(a \rightarrow \neg b), & (27)\\ a \vee b &= (a \rightarrow b) \rightarrow b. & (28) \end{aligned}$$

Beweis. Für $a, b \in A$ gilt wegen (MV) $a \rightarrow b = a \rightarrow (\neg b \rightarrow 0) = (a \odot \neg b) \rightarrow 0 = \neg(a \odot \neg b)$. Das beweist (26), woraus sich unmittelbar auch (27) ergibt.

Weiter ist $\neg b \rightarrow \neg a = \neg b \rightarrow (a \rightarrow 0) = a \rightarrow (\neg b \rightarrow 0) = a \rightarrow \neg\neg b = a \rightarrow b$. Da $\neg$ ordnungsumkehrend und bijektiv ist, folgt $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b) = \neg[\neg b \odot (\neg b \rightarrow \neg a)] = [(\neg b \rightarrow \neg a) \odot \neg b] \rightarrow 0 = (\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow b = (a \rightarrow b) \rightarrow b$. □

Das folgende Beispiel ist allgemeinerer Natur als 4.25 – und ist, wie sich zeigen wird, bereits das allgemeinste.

Definition 4.33 Eine Struktur $(G; +, \leq)$ heiße eine *partiell geordnete Gruppe*, kurz *po-Gruppe*, falls

(poG1) $(G; +)$ eine Gruppe ist;

(poG2) $(G; \leq)$ eine partiell geordnete Menge ist;

(poG3) für alle $a, b, c \in G$ mit $a \leq b$ $a + c \leq b + c$ sowie $c + a \leq c + b$ gilt.

Den Prototyp einer partiell geordneten Gruppe bieten die reellen Zahlen; $(R; +, \leq)$, worin $+$ die gewöhnliche Addition und $\leq$ die natürliche Ordnung bedeutet, ist offensichtlich eine po-Gruppe, und zwar sogar eine linear geordnete.

Beispiel 4.34 Es sei $(G; +, \leq)$ eine abelsche po-Gruppe und u ein Element von G mit $u > 0$. Es sei

$$G[0, u] \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \colon 0 \leq g \leq u\}$$

das von 0 bis u reichende Intervall von G. Weiter sei $G[0,u]$ mittels $\leq$ partiell geordnet und seien wie folgt die Operationen $\odot$, $\rightarrow$ auf $G[0,u]$ erklärt:

$$\begin{aligned} \odot\colon\ & G[0,u] \times G[0,u] \rightarrow G[0,u], \quad (a,b) \mapsto (a+b-1) \vee 0, \\ \rightarrow\colon\ & G[0,u] \times G[0,u] \rightarrow G[0,u], \quad (a,b) \mapsto (1-a+b) \wedge 1. \end{aligned} \tag{29}$$

Dann ist $(G[0,u]; \leq, \odot, \rightarrow, 0, u)$ eine MV-Algebra. Dies ergibt sich durch direkte Überprüfung der Axiome für BL-Algebren sowie (MV).

Man beachte, daß, wenn man vom Standardbeispiel einer po-Gruppe, $(R; +, \leq)$ nämlich, ausgeht, man die łukasiewiczsche Wahrheitswertealgebra aus Beispiel 4.25 erhält.

Hauptergebnis dieses Unterabschnittes wird der Satz 4.39 sein, demzufolge sich jede MV-Algebra auf diese Weise aus einer po-Gruppe konstruieren läßt. Um dies zu zeigen, wird in einem ersten Schritt für eine gegebene MV-Algebra eine Addition definiert, die anschließend als Gruppenaddition verwendet wird; diese kann naturgemäß noch nicht für alle Paare von Elementen definiert sein.

Definition 4.35 Es sei $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ eine MV-Algebra. Es sei $+$ eine auf A wie folgt erklärte partielle binäre Operation:

$$\begin{aligned} &a + b \text{ existiere, falls } a \leq \neg b; \\ &\text{in diesem Fall sei } a + b \overset{\text{def}}{=} \neg(\neg a \odot \neg b). \end{aligned}$$

Dann heiße $(A; \leq, +, 0, 1)$ die zu A gehörige *Effektalgebra*.

Der Terminus Effektalgebra kommt aus einer ganz anderen Ecke und stiftet hier hoffentlich keine Verwirrung.

Durch den Übergang von den MV-Algebra-Operationen zur partiellen Addition geht keine Information verloren; die alte Struktur ist wie folgt rückgewinnbar.

Lemma 4.36 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine MV-Algebra und* $(A; \leq, +, 0, 1)$ *die zugehörige Effektalgebra. Dann ist für jedes* $a \in A$ $\neg a$ *genau* *dasjenige Element, für welches $a+\neg a$ definiert und $=1$ ist. Weiter gilt für $a, b \in A$*

$$a \odot b = \neg(\neg a + (\neg b \wedge a)), \tag{30}$$
$$a \to b = \neg a + (a \wedge b). \tag{31}$$

Beweis. Für ein $a \in A$ ist $a + \neg a$ offensichtlich definiert, und $a + \neg a = \neg(a \odot \neg a) = \neg(a \odot (a \to 0)) = \neg(a \wedge 0) = \neg 0 = 1$. Ist umgekehrt $a + b = 1$, so gilt $b \leq \neg a$ und $\neg a \odot \neg b = 0$, aus welch letzterem wegen (3) $\neg a \leq \neg b \to 0 = b$ folgt; zusammengenommen ergibt sich $b = \neg a$.

Weiter folgt wegen (MV) für $a, b \in A$ mit $\neg a \leq b$, daß $a \odot b = \neg(\neg a + \neg b)$. Für beliebiges $a, b \in A$ gilt wegen Satz 4.19 $a \odot b = a \odot (b \vee \neg a)$, und es folgt $a \odot b = \neg(\neg a + \neg(b \vee \neg a)) = \neg(\neg a + (\neg b \wedge a))$. Dies ist die Gleichung (30); die zweite, (31), folgt mithilfe von (26). □

Lemma 4.37 *Es sei $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ eine MV-Algebra und $(A; \leq, +, 0, 1)$ die zugehörige Effektalgebra. Dann gilt für alle $a, b, c \in A$:*

(i) *Existiert $(a+b)+c$, so auch $a+(b+c)$ und sind beide Ausdrücke gleich.*

(ii) *Existiert $a+b$, so auch $b+a$ und sind beide Ausdrücke gleich.*

(iii) *Aus $a+b = a+c$ folgt $b = c$.*

(iv) *Es gilt $a \leq b$, gdw $b = a + d$ für ein $d \in A$.*

Beweis. (i) Es sei $(a + b) + c$ definiert. Dann gilt $b \leq \neg a$ und $a + b = \neg(\neg a \odot \neg b) = \neg a \to b \leq \neg c$, und es folgt $\neg c \to b \leq (\neg a \to b) \to b) = \neg a \vee b = \neg a$. Wegen $b \leq a + b \leq \neg c$ existiert $b + c$, und wegen $b+c = \neg(\neg b \odot \neg c) = \neg c \to b \leq \neg a$ existiert auch $a+(b+c)$. Die Summe von a, b, c gleicht für beide Klammerungsarten $\neg(\neg a \odot \neg b \odot \neg c)$.

(ii) Dies ist leicht nachzurechnen.

(iii) Es seien $a, b, c \in A$ gegeben mit $a+b = a+c$; dies heißt $\neg(\neg a \odot \neg b) = \neg(\neg a \odot \neg c)$ sowie $\neg a \leq b, c$. Es folgt $\neg b \to a = \neg c \to a$ und weiter $\neg b = a \vee \neg b = (\neg b \to a) \to a = (\neg c \to a) \to a = a \vee \neg c = \neg c$, also $b = c$.

(iv) Aus $a \leq b$ folgt $\neg b \leq \neg a$, also $\neg b = \neg a \odot e = \neg a \odot (e \vee a)$ für ein $e \in A$. Es wird $d = \neg e \wedge \neg a \leq \neg a$ und $b = a + d$. $\square$

Lemma 4.38 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine linear geordnete MV-Algebra und* $(A; \leq, +, 0, 1)$ *die zugehörige Effektalgebra. Dann gibt es eine linear geordnete Gruppe* $(G; +, \leq)$ *mit positivem Element* u*, so daß* $(A; \leq, +, 0, 1)$ *und* $(G[0, u]; +, 0, u)$ *isomorph sind, wobei* $+$ *genau für alle summierbaren Gruppenelemente definiert ist.*

Des weiteren ist $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *zu der gemäß* Beispiel 4.34 *definierten MV-Algebra* $(G[0, u]; \leq, \odot, \rightarrow, 0, u)$ *isomorph.*

Beweis. Für Elemente $a, b \in A$ mit $a \leq b$ sei im folgenden $b - a$ dasjenige gemäß Lemma 4.37(iv) existierende und eindeutige Element, für welches $a + (b - a) = b$.

Es sei $G = Z \times (E \setminus \{1\})$; auf G sei eine Addition gemäß

$$+ \,:\, G \times G \rightarrow G, \quad ((m, a), (n, b)) \mapsto \begin{cases} (m + n,\, a + b) & \text{für } a < \neg b, \\ (m + n + 1,\, a - \neg b) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Assoziativität weist man durch Fallunterscheidungen direkt nach; die Details seien hier weggelassen. Neutrales Element ist $(0, 0)$, und zu einem Element $(n, a) \in A$ ist $(-n - 1, \neg a)$ das Inverse.

G sei weiter gemäß

$$(m, a) \leq (n, b) \text{ im Fall } m < n \text{ oder } m = n \text{ und } a \leq b$$

partiell geordnet. Da offensichtlich (poG3) erfüllt ist, wird G so zur po-Gruppe.

Schließlich ist $G[(0, 0), (1, 0)] = \{(0, a) : \ a \in A\} \cup \{(0, 1)\}$. Es ist offensichtlich, daß $G[(0, 0), (1, 0)]$, ausgestattet mit der Addition $+$, wo immer sie ausführbar ist, zu A isomorph ist.

Für $a, b \in A$ gilt weiter gemäß (30) $a \odot b = \neg(\neg a + (\neg b \wedge a))$; da A linear geordnet ist, heißt dies $a \odot b = \neg(\neg a + \neg b)$ im Fall $a > \neg b$, $a \odot b = 1$ sonst. Dieselben Gleichungen gelten auch in G: Mit Bezug auf $G[(0, 0), (1, 0)]$ gilt $(0, a) \odot (0, b) = (0, a) + (0, b) - (1, 0) = (1, 0) - ([(1, 0) - (0, a)] + [(1, 0) - (0, b)])$ im Fall $1 > a > \neg b$, andernfalls ergibt die Verknüpfung mit $\odot$ $(1,0)$. In $G[(0,0),(1,0)]$ bestimmt sich also $\odot$ gemäß (29); und Ähnliches gilt auch für $\to$.

Also ist die MV-Algebra A der wie im Beispiel 4.34 aus der po-Gruppe G hervorgehenden isomorph. $\square$

Satz 4.39 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ *eine MV-Algebra. Dann gibt es eine po-Gruppe* $(G; +, \leq)$*, so daß* $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ *und* $(G[0,u]; \leq, \odot, \to, 0, u)$*, konstruiert gemäß* Beispiel 4.34*, isomorph sind.*

Beweis. A ist gemäß Satz 4.30 subdirekte Darstellung von BL-Algebren. Da in allen linear geordneten Quotientenalgebren wie in A die Gleichung (MV) gilt, handelt es sich um linear geordnete MV-Algebren.

Gemäß Lemma 4.38 läßt sich A weiter in das Einheitsintervall einer po-Gruppe $(G'; +, \leq)$ isomorph einbetten. Die von A, als Teilmenge von G', erzeugte Untergruppe G von G' hat schließlich die gewünschten Eigenschaften. $\square$

4.3.3 Darstellung von Produktalgebren

Eine zweite Unterklasse von BL-Algebren sind die Produktalgebren. Diese sind weniger gut bekannt, sind aber die Lindenbaumalgebren einer Logik, die auf einer selten suggestiven t-Norm beruht: der Produkt-t-Norm aus Beispiel 4.5.

Definition 4.40 Eine BL-Algebra $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ heiße *Produktalgebra*, falls

(P1) $a \wedge \neg a = 0$ für alle $a \in A$;

(P2) für alle $a, b, c \in A$ $\neg\neg a = 1$ und $a \odot b = a \odot c$ $b = c$ impliziert.

Das prototypische Beispiel ist wiederum Beispiel 4.25 zu entnehmen: Ein System von Fuzzymengen zusammen mit der punktweise ausgeführten Produkt-t-Norm und zugehörigem Residuum ist eine Produktalgebra.

Das nächste Beispiel ist wieder von so großer Allgemeinheit, daß es gleich alle Fälle abdeckt.

Beispiel 4.41 Es sei $(G; +, \leq)$ eine po-Gruppe. Es sei

$$A(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \colon g \leq 0\} \dot{\cup} \{0'\}$$

die Menge aller negativen Elemente von G, erweitert um ein neues Element $0'$. A sei partiell geordnet in einer Weise, daß A dieselbe partielle Ordnung aufweist wie in G sowie $0'$ als kleinstes Element hat; es gelte also für je zwei von $0'$ verschiedene Elemente $a, b, \in A(G)$ $a \leq b$, gdw dies in bezug auf G der Fall ist, sowie $0' \leq a$ für alle $a \in A(G)$. Außerdem sei $1' \stackrel{\text{def}}{=} 0$ und

$$\begin{aligned} \odot\colon\ & A(G) \times A(G) \to A(G), \quad (a, b) \mapsto a + b, \\ \to\colon\ & A(G) \times A(G) \to A(G), \quad (a, b) \mapsto \begin{cases} b - a & \text{für } a \geq b, \\ 1' & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{32}$$

Dann ist $(A(G); \leq, \odot, \to, 0', 1')$ eine Produktalgebra. Dies ergibt sich durch direkte Überprüfung der Axiome für BL-Algebren sowie (P1) und (P2).

Man wird also wie bei den MV-Algebren zu partiell geordneten Gruppen geführt. Daß alle Produktalgebren diese Form haben, ist glücklicherweise weit weniger aufwendig zu beweisen als im Fall der MV-Algebren.

Lemma 4.42 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ *eine linear geordnete Produktalgebra. Dann gibt es eine linear geordnete po-Gruppe* $(G; +, \leq)$*, so daß* $(A; \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ *und* $(A(G); \leq, \odot, \to, 0', 1')$*, konstruiert gemäß Beispiel 4.41, isomorph sind.*

Beweis. Es sei $A' = A \setminus \{0, 1\}$ die Menge aller von 0 und 1 verschiedenen Elemente der Produktalgebra; es sei

$$G = \{(-1, a) \colon a \in A'\} \cup \{(0, 0)\} \cup \{(1, a) \colon a \in A'\},$$

versehen mit der wie folgt erklärten Operation $+$:

$$\begin{aligned}
(-1,a)+(-1,b) &= (-1,a\odot b),\\
(-1,a)+(1,b) &= \begin{cases} (-1,b\to a) & \text{für } a<b,\\ (0,0) & \text{für } a=b,\\ (1,a\to b) & \text{für } a>b \end{cases}\\
(1,a)+(1,b) &= (1,a\odot b)
\end{aligned}$$

für $a,b\in A'$; und $(0,0)$ sei bezüglich $+$ neutrales Element. Damit ist $(G;+)$ eine Gruppe.

Weiter sei G partiell geordnet gemäß $(-1,a)\leq(0,0)\leq(1,b)$ für alle $a,b\in A'$ und $(-1,a)\leq(-1,b)$, gdw $(1,b)\leq(1,a)$, gdw $a\leq b$ in bezug auf A. Damit wird $(G;+,\leq)$ zur po-Gruppe.

Offenbar läßt sich A aus G wie im Beispiel 4.41 rekonstruieren. $\square$

Satz 4.43 *Es sei* $(A;\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ *eine Produktalgebra. Dann gibt es eine po-Gruppe* $(G;+,\leq)$*, so daß* $(A;\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ *und* $(A(G);\leq,\odot,\to,0',1')$*, konstruiert gemäß Beispiel 4.41, isomorph sind.*

Beweis. A ist gemäß Satz 4.30 subdirekte Darstellung von BL-Algebren. Weiter ist die Bedingung (P1) von der Form einer Gleichung und läßt sich (P2) formulieren gemäß

$$\neg\neg a\leq[((a\odot b)\to(a\odot c))\to(b\to c)],$$

was ebenfalls als Gleichung geschrieben werden kann. Da in den linear geordneten Quotientenalgebren alle Gleichungen gelten, die in A gelten, handelt es sich um linear geordnete Produktalgebren. Die Behauptung folgt damit auf Grundlage von Lemma 4.42. $\square$

4.3.4 Struktur linear geordneter BL-Algebren

Am aufwendigsten ist nun die nähere Analyse der Struktur linear geordneter BL-Algebren. Der erste Beweis erschien in [Haj2, CEGT].

Satz 4.44 *Es sei* $(A; \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine linear geordnete BL-Algebra. Dann gibt es paarweise disjunkte, konvexe Teilmengen* S_κ*,* $\kappa \in K$*, von* A*, so daß für jedes* κ *gilt:*

(i) *Enthält* S_κ *kein kleinstes Element, ist* $(T_\kappa; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine Produktalgebra, worin* $T_\kappa = S_\kappa \cup \{0, 1\}$ *ist.*

(ii) *Enthält* T_κ *das kleinste Element* 0_κ*, ist* $(T_\kappa; \leq, \odot, \rightarrow, 0_\kappa, 1)$ *eine MV-Algebra, worin* $T_\kappa = S_\kappa \cup \{1\}$ *ist.*

Weiter gilt für alle Elementepaare $a, b \in A$ *mit* $a \leq b$*, für die es kein* κ *gibt mit* $a, b \in S_\kappa$*:* $a \odot b = a$*,* $b \rightarrow a = a$*,* $a \rightarrow b = 1$*.*

Beweis. Für je zwei Elemente $a, b \in A$ mit $a \leq b$ gelte $z(a, b)$, falls $a \odot b < a$ gilt. Gezeigt werde zunächst: Aus $a \leq b \leq c$ und $z(a, b)$, $z(b, c)$ folgt $z(a, c)$, und aus $a \leq b \leq c \leq d$ und $z(a, d)$ folgt $z(b, c)$.

Es sei also $a \leq b \leq c$ und $z(a, b)$, $z(b, c)$ angenommen und außerdem $a \odot c = a$. Mit $e = a \rightarrow (a \odot b)$ wird $b \leq e < c$; weiter ist $c \rightarrow e = (a \odot c) \rightarrow (a \odot b) = e$ und folglich $b = e \wedge b = e \odot (e \rightarrow b) = (c \wedge e) \odot (e \rightarrow b) = c \odot (c \rightarrow e) \odot (e \rightarrow b) = c \odot e \odot (e \rightarrow b) = c \odot (b \wedge e) = c \odot b < b$. Also muß $a \odot c < a$, d.h. $z(a, c)$ gelten.

Weiter sei $a \leq b \leq c \leq d$. Dann folgt aus $b \odot c = b$, daß $a \odot c = b \odot (b \rightarrow a) \odot c = b \odot (b \rightarrow a) = a$. Weiter ist $a \geq a \odot d = \min \{y \colon d \leq a \rightarrow y\} \geq \min \{y \colon c \leq a \rightarrow y\} = a \odot c = a$, d.h. $a \odot d = a$. Es folgt der zweite Teil.

Es seien S_κ, $\kappa \in K$, die maximalen Teilmengen von A mit der Eigenschaft, daß $z(a, b)$ für je zwei Elemente $a, b \in I$ mit $a \leq b$ gilt. Je zwei solche Teilstücke überschneiden sich dann nicht; und jedes solche Teilstück ist konvex, d.h. mit zwei Elementen a und b enthält es auch alle zwischen a und b liegenden Elemente.

Es seien nun a und b zwei Elemente der BL-Algebra A, die nicht in einem gemeinsamen der so bestimmten Teilstücke liegen, und es sei $a \leq b$. Dann gilt konstruktionsgemäß $a \odot b = a$. Es liege zudem b entweder in keinem solchen Teilstück; oder aber b liege in einem Teilstück S_κ, und zwischen a und S_κ sei noch mindestens ein weiteres Element vorhanden; dann folgt offensichtlich $b \rightarrow a = a$.

Es sei nun ein Teilstück S_κ für ein $\kappa \in K$ fest gegeben. Für $a, b \in S_\kappa$ mit $a < b$ gilt dann $b \to a \in S_\kappa$; denn $b \to a = \max \{x\colon b \odot x \leq a\} \notin S_\kappa$ hieße $b = b \odot x \leq a$ für ein x oberhalb von S_κ.

Folge dieses Umstandes ist, daß in S_κ die Kürzungseigenschaft gilt: Ist $a, b, c \in S_\kappa$ sowie $a \odot b = a \odot c \in S_\kappa$, gilt $b = c$. Denn unter der Annahme $b \leq c$ wird $a \odot b = a \odot (b \wedge c) = a \odot c \odot (c \to b) = a \odot b \odot (c \to b)$, womit $c \to b$ nicht in S_κ liegen kann, d.h. $b = c$ gelten muß.

Weiter liegt für $a, b \in S_\kappa$ $a \odot b$ entweder in S_κ oder ist untere Schranke von S_κ; im letzteren Fall sei $0_\kappa = a \odot b$ gesetzt. Unter den nicht in S_κ liegenden Elementen unterhalb S_κ ist 0_κ das größte, womit folgt, daß 0_κ das einzige Element außerhalb S_κ ist, auf das die auf Elemente von S_κ angewendete Operation $\odot$ führen kann. Denn gegenteiligenfalls wäre ja $a \to 0_\kappa = 0_\kappa$ im Widerspruch zu $a \odot b = 0_\kappa$, das heißt $a \to 0_\kappa \geq b$. Im übrigen ist, da $0_\kappa \notin S_\kappa$, $d \odot 0_\kappa = 0_\kappa$ für alle $d \in S_\kappa$ und damit auch $0_\kappa \odot 0_\kappa = 0_\kappa \odot a \odot b = 0_\kappa \odot b = 0_\kappa$.

Es sei T_κ wie folgt aus S_κ konstruiert: Ist S_κ unter $\odot$ abgeschlossen, sei $T_\kappa = S_\kappa \cup \{0, 1\}$, andernfalls sei $T_\kappa = S_\kappa \cup \{0_\kappa, 1\}$. Dann ist T_κ offenbar unter den BL-Operationen abgeschlossen und damit $(T_\kappa; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ bzw. $(T_\kappa; \leq, \odot, \to, 0_\kappa, 1)$ eine BL-Algebra. Es gilt im weiteren zu zeigen, daß es sich um Produkt- bzw. um eine MV-Algebra handelt.

Es sei zunächst der Fall betrachtet, daß S_κ unter $\odot$ abgeschlossen ist.

Ist dann $a \in T_\kappa$, ist entweder $a = 0$ oder sonst $a \to 0 = \max \{x : x \odot a = 0\} = 0$, da ja $x \odot a > 0$ für jedes $x > 0$ gilt. Also gilt $a \wedge (a \to 0) = 0$. Dies beweist die in Definition 4.40 erstgenannte Eigenschaft von Produktalgebren.

Ist weiter $a, b, c \in T_\kappa$ und $a > 0$, folgt aus $a \odot b = a \odot c$ $b = c$. Denn ist $b = 0$, so $a \odot c = 0$, also $c = 0$; ist $b = 1$, folgt $a \odot c = a$, was $c = 1$ bedeutet; und gilt $0 < b < 1$, d.h. $b \in S_\kappa$, so auch $c \in S_\kappa$ und folglich $a \odot b = a \odot c \in S_\kappa$, woraus mittels der Kürzungseigenschaft $b = c$ folgt. Damit ist klar, daß T_κ eine Produktalgebra ist.

Es sei nun angenommen, daß das Nullement 0_κ von T_κ das Produkt zweier echt positiver, d.h. aus S_κ stammender, Elemente ist: $0_\kappa = e \odot f$. Es sei des weiteren $\sim$ die Negation in T_κ, d.h. es stehe für den Rest dieses Beweises $\sim a$ ausnahmsweise für $a \to 0_\kappa$. Behauptet wird, daß dann für jedes $a \in T_\kappa$ $\sim\sim a = a$ gilt und damit gemäß Definition 4.31

T_κ eine MV-Algebra ist.

Im Fall $a = 0_\kappa$ oder $a = 1$ ist offenbar $\sim\sim a = a$; im weiteren sei $0_\kappa < a < 1$, d.h. $a \in S_\kappa$ angenommen. Es gilt dann $\neg a > 0_\kappa$; denn aus $\neg a = 0_\kappa$ würde $a \to\sim\sim e =\sim e \to\sim a =\sim\sim e$ folgen und damit $a\odot \sim\sim e =\sim\sim e$, was im Widerspruch zu $a > 0_\kappa$ und $\sim\sim e \geq e > 0_\kappa$ steht. Also $a, \sim a, \sim\sim a \in S_\kappa$.

Es gilt nun entweder $\sim a \leq a$ oder $\sim a > a$. Im ersten Fall ist $0_\kappa <\sim a \leq a \leq\sim\sim a$ und folglich einerseits $\sim a =\sim a \wedge a = a \odot (a \to\sim a)$ und andererseits $\sim a =\sim a \wedge \sim\sim a =\sim\sim a \odot (\sim\sim a \to\sim a) =\sim\sim a \odot (a \to\sim a)$. Es folgt aus der Kürzungseigenschaft $a =\sim\sim a$.

Im zweiten Fall ist $0_\kappa < a \leq\sim\sim a \leq\sim a$ und damit $\sim a =\sim (a\wedge \sim\sim a) = (\sim\sim a\odot(\sim\sim a \to a)) \to 0_\kappa = (\sim\sim a \to a) \to\sim\sim\sim a = (\sim\sim a \to a) \to\sim a$. Es folgt $(\sim\sim a \to a)\odot \sim a =\sim a$ und damit $\sim\sim a \to a = 1$, das heißt $\sim\sim a = a$. □

Damit soll die Strukturtheorie für BL-Algebren abgeschlossen werden. Was einzig noch fehlt, ist die genaue Gestalt linear geordneter abelscher Gruppen, aus denen ja die MV- und Produktalgebren konstruiert sind. Deren Beschreibung sei hier weggelassen; zu finden ist der erschöpfende Auskunft gebende Hahnsche Einbettungssatz z.B. in [Fuc].

4.4 Vollständigkeit

Der Beweis der Vollständigkeit von **BL** ist nicht in so einfacher Weise möglich wie der Beweis von Satz 3.15; vielmehr ist Satz 2.27 maßgeblich.

Der schwierige Beweisschritt besteht darin zu zeigen, für ein nicht beweisbares φ eine auf einer t-Norm basierende Belegung v existiert, für die $v(\varphi) < 1$ wird. Daß es eine Belegung mit einer linear geordneten BL-Algebra mit $v(\varphi) < 1$ gibt, ist durch Satz 4.30 klar.

Lemma 4.45 *Eine Aussage φ ist in* **BL** *beweisbar, gdw sie unter jeder Belegung mit einer linear geordneten BL-Algebra gültig ist.*

Beweis. Ist eine Aussage φ beweisbar, gilt, da alle Regeln die Gültigkeit für jede Belegung v mit einer BL-Algebra erhalten daß φ unter jeder solchen gültig ist.

Es sei φ nicht beweisbar. Dann ist $\mathcal{P}_{\mathbf{BL}} \to \mathcal{A}(\mathbf{BL}), \quad \alpha \mapsto [\alpha]$ eine Belegung mit einer BL-Algebra, unter der φ nicht gültig ist. Wegen der subdirekten Darstellbarkeit von $\mathcal{A}(\mathbf{BL})$ gibt es auch eine linear geordnete BL-Algebra mit dieser Eigenschaft. □

Der Übergang von einer linear geordneten BL-Algebra zu einer t-Norm ist dank des Struktursatzes 4.44 machbar. Für diesen letzten Schritt ist das folgende Faktum über BL-Algebren zu zeigen.

Definition 4.46 Eine BL-Algebra A_1 heiße *lokal darstellbar [locally representable]* durch eine BL-Algebra A_2, falls es für jede endliche Teilmenge $K \subseteq A_1$ eine injektive Abbildung $r\colon\ K \to A_2$ gibt, so daß aus $\alpha \odot \beta = \gamma$ für $\alpha, \beta, \gamma \in K$ folgt $r(\alpha) \odot r(\beta) = r(\gamma)$, weiter aus $\alpha \to \beta = \gamma$ für $\alpha, \beta, \gamma \in K \quad r(\alpha) \to r(\beta) = r(\gamma)$ sowie für $0 \in K \quad r(0) = 0$, für $1 \in K \quad r(1) = 1$. Die Abbildung r werde in diesem Zusammenhang *Darstellung* von K genannt.

Lemma 4.47 *Jede linear geordnete MV-Algebra ist lokal darstellbar durch die łukasiewiczsche Wahrheitswertealgebra.*

Jede linear geordnete Produktalgebra ist lokal darstellbar durch die Produkt-Wahrheitswertealgebra.

Jede linear geordnete BL-Algebra ist lokal darstellbar durch eine t-normbasierte Wahrheitswertealgebra.

Beweis. Linear geordnete MV- wie Produktalgebren lassen sich gemäß den Lemmata 4.38 und 4.42 durch gewisse Teilmengen abelscher linear geordneter po-Gruppen darstellen.

Eine abelsche linear geordnete Gruppe $(G; +, \leq)$ kann in eine teilbare solche, etwa $(G', + \leq)$ eingebettet werden; s. [Fuc, IV.5, Lemma A]; dann ist G mit einer Teilmenge von G' identifizierbar. Dabei heißt eine Gruppe teilbar, falls für jedes $a \in G'$ und $n \in N$ ein $b \in G'$ mit $nb = a$ existiert.

Nun ist die Theorie nicht nur aus dem Neutralen 0 bestehender, teilbarer, linear geordneter Gruppen vollständig. Das heißt, daß in G' dieselben Sätze gelten wie in jeder anderen solchen Gruppe, also insbesondere dieselben wie in $(R; +, \leq)$.

Es sei $K = \{g_1, \dots g_k\}$ eine 0 enthaltende endliche Teilmenge von G. Weiter sei $\kappa(a_1, \dots, a_k)$ die Konjunktion aller Formeln $a_{i_1} = a_{i_2} + a_{i_3}$, für die $g_{i_1} = g_{i_2} + g_{i_3}$ gilt, sowie der Formeln $a_{i_1} \leq a_{i_2}$, für die $g_{i_1} \leq g_{i_2}$ gilt; $i_1, i_2, i_3 \in \{1, ..., k\}$. Dann gilt in G und in G' und infolgedessen auch in R der Satz $\exists a_1 \dots \exists a_k \quad \kappa(a_1, \dots, a_k)$. Es folgt, daß es eine Abbildung $s\colon K \to R$ gibt, die die in K existierenden Summen sowie die Ordnung erhält.

Es sei nun A eine linear geordnete Produktalgebra und $K \subseteq A$ endlich. Dann gibt im Hinblick auf Lemma 4.42 eine ordnungserhaltende Abbildung s von $K \setminus \{0\}$ in die negativen reellen Zahlen $R^- = \{g \in R\colon g \leq 0\}$, so daß für $a, b, c \in K \setminus \{0\}$ mit $a \odot b = c$ gilt $s(a) + s(b) = s(c)$. Es sei $r\colon K \to [0,1]$ folgendermaßen definiert: Es sei $r(0) = 0$, und für $a \neq 0$ sei $r(a) = e^{s(a)}$. Dann ist, wie man leicht nachprüft, r eine Darstellung von K in der Produkt-Wahrheitswertealgebra $([0,1]; \odot, \to, 0, 1)$.

Weiter sei A eine linear geordnete MV-Algebra und $K \subseteq A$ endlich; angenommen sei dabei, daß mit jedem a auch $\neg a$ in K liege sowie $0, 1 \in K$ seien. Im Hinblick auf Lemma 4.38 kann $A = G[0, u]$ für eine linear geordnete Gruppe angenommen werden. Es sei $r : K \to R$ eine Abbildung, die die Ordnung und in K existierende Summen erhält; dann ist $r(0) = 0$, und ggf. durch Anbringung eines geeigneten Faktors kann $r(u) = 1$ erreicht werden. Also ist r ein ordnungserhaltende Abbildung r von K nach $[0, 1]$.

Es sei $a \in K$. Dann ist $a \to 0 = \neg a$, also mit Bezug auf G $u - a = \neg a$ oder $a + \neg a = u$. Da $\neg a \in K$, folgt $r(a) + r(\neg a) = 1$, also $r(\neg a) = 1 - r(a)$. Also wird die Operation $\neg$ erhalten. Weiter sei $a, b, c \in K$ mit $a \odot b = c$. Ist dann $a \geq \neg b$, gilt mit Bezug auf die Gruppe G $a + b - u = c$, also $a = c + \neg b$ und folglich $r(a) = r(c) + r(\neg b) = r(c) + 1 - r(b)$, also $r(a) \odot r(b) = r(a) + r(b) - 1 = r(c)$. Ist dann $a \leq \neg b$, gilt $a \odot b = 0$, also mit Bezug auf die Gruppe $a + b - u \leq 0$, also $a + b \leq u$ und folglich $r(a) + r(b) \leq 1$, also $r(a) \odot r(b) = 0$. Damit ist gezeigt, daß auch die Operation $\odot$, wo in K existent, erhalten wird. Da sich $\to$ durch $\odot$ und $\neg$ ausdrücken läßt, wird auch diese Operation erhalten. Also ist r eine Darstellung von K in der łukasiewiczschen Wahrheitswertealgebra $([0, 1]; \odot, \to, 0, 1)$.

Schließlich sei A eine linear geordnete BL-Algebra und $K \subseteq L$ endlich. Es seien S_κ, $\kappa \in A$, wie in Satz 4.44, und J_K sei die endliche Teilmenge derjenigen Indizes κ, für die S_κ Elemente von K enthält.

Dann seien I_i, $i \in J_K$, sich paarweise nicht berührende Intervalle von $[0,1]$, die so in $[0,1]$ liegen, daß ihre Reihenfolge der Ordnung von J_K entspricht. Dabei sei I_i links geschlossen und rechts offen, falls S_κ ein kleinstes Element hat, und offen sonst. $\odot$ sei eine mittels dieser Intervalle gemäß Beispiel 4.6 konstruierte t-Norm.

Auf Grundlage des Satzes 4.44 folgt nun aus den ersten beiden Teilen dieses Lemmas, daß es eine Darstellung von K in der Algebra $([0,1]; \odot, \rightarrow, 0, 1)$ gibt. $\square$

Satz 4.48 *Die Logik* **BL** *ist vollständig.*

Beweis. Gegeben sei eine Aussage φ. Gezeigt war, daß, wenn φ beweisbar ist, sie unter jeder Belegung mit einer stetigen t-Norm gültig ist.

φ sei nicht beweisbar. Gezeigt war mit Lemma 4.45, daß φ unter der Belegung mit einer gewissen linear geordneten BL-Algebra A nicht gültig ist. Aus den Lemmata 4.44 und 4.47 folgt, daß eine linear geordnete BL-Algebra durch eine t-Norm lokal darstellbar ist. Wie man sich leicht überlegt, hat φ folglich unter der Belegung seiner Unteraussagen mit gewissen Wahrheitswerten und unter der Interpretation seiner Verknüpfungen durch eine gewisse t-Norm einen von 1 verschiedenen Wahrheitswert, ist φ also nicht gültig. $\square$

Was schließlich die starke Vollständigkeit angeht, ist nicht die gleiche Schlußweise anwendbar wie im Fall von **KL**. Einzig gilt als Folge des Satzes 2.28 die eingeschränkt starke Vollständigkeit.

5 Łukasiewiczsche, Produkt- und gödelsche Logik

5.1 Ansatz

In der Standard-Fuzzyaussagenlogik **BL** sind all diejenigen Aussagen gültig, denen unter jeder Belegung der eingehenden Teilaussagen der Wahrheitswert 1 zukommt, wobei man, und das war der entscheidende Punkt, die Konjunktion $\odot$ von einer beliebig gewählten t-Norm zu interpretieren hat und die Implikation $\rightarrow$ vom jeweils zugehörigen Residuum. Es handelt es sich folglich um so etwas wie eine minimale Fuzzylogik - sofern man davon absieht, daß es die noch schwächere Logik **MTL** gibt, die Logik linksstetiger t-Normen.

Für praktische Anwendungen ist es allerdings wahrscheinlicher, daß man seiner Logik eine bestimmte, und zwar eine der üblichen t-Normen zugrundelegen möchte. Es gibt drei kanonische t-Normen, die in Beispiel 4.5 angegebenen: die łukasiewiczsche, die Produkt- und die gödelsche.

5.2 Die Kalküle

Wir spezialisieren nun **BL** zu Logiken, die je einer der Standard-t-Normen entsprechen. Wir geben, um Wiederholungen zu vermeiden, eine einzelne Definition für alle drei.

Definition 5.1 Es sei FmA_L bzw. FmA_P bzw. FmA_G die Klasse aller Algebren $(A; \odot, \rightarrow, \bar{0})$, worin A ein unter der łukasiewiczschen bzw. Produkt- bzw. gödelschen t-Norm $\odot$ sowie dem zu $\odot$ gehörigen Residuum $\rightarrow$ abgeschlossenes sowie die Fuzzynull enthaltendes System von Fuzzymengen über einer nichtleeren Menge ist, $\odot$ und $\rightarrow$ die jeweiligen punktweise ausgeführten Operationen bezeichnen und $\bar{0}$ die Fuzzynull ist.

$(\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}, \models_{FmA_L})$ ist die *łukasiewiczsche Logik*, $(\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}, \models_{FmA_P})$ ist die *Produktlogik* und $(\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}, \models_{FmA_G})$ ist die *gödelsche Logik*.

Definition 5.2 Der *Kalkül der łukasiewiczschen bzw. Produkt- bzw. gödelschen Logik* **ŁL** bzw. **PL** bzw. **GL** ist der $\mathcal{L}_{\mathbf{BL}}$-Kalkül, der aus allen

Regeln von **BL** besteht sowie im Fall **ŁL** außerdem aus dem Axiomenschema

(L) $\neg\neg\alpha \to \alpha$;

im Fall **PL** außerdem aus den Axiomenschemata

(P1) $\neg\neg\alpha \to [(\alpha \odot \beta \to \alpha \odot \gamma) \to (\beta \to \gamma)]$,

(P2) $\alpha \odot \neg\alpha \to 0$;

und im Fall **GL** außerdem aus dem Axiomenschema

(G) $\alpha \to \alpha \odot \alpha$.

5.3 Vollständigkeit

Alle drei Logiken sind vollständig. Den Beweis dafür geben wir nur für einen Fall.

Satz 5.3 *Die Logik* **ŁL** *ist vollständig.*

Beweis. Das Axiom (L) ist, wenn auf Basis der łukasiewiczschen t-Norm interpretiert, gültig; es folgt daher wie im Fall von **BL**, daß überhaupt jede von **ŁL** bewiesene Aussage gültig ist.

Weiter ist in **ŁL** sowohl $\alpha \to \neg\neg\alpha$ als auch $\neg\neg\alpha \to \alpha$ beweisbar. Die Lindenbaumalgebra von **ŁL** ist folglich eine BL-Algebra, für die $\neg$ involutiv ist - also eine MV-Algebra.

Es sei φ in **ŁL** nicht beweisbar. Also gibt es eine Belegung mit Werten aus einer MV-Algebra - der Lindenbaumalgebra nämlich -, unter der φ nicht gültig ist. Da MV-Algebra subdirektes Produkt linear geordneter solcher sind, kann man weiter zu einer linear geordneten übergehen.

Gemäß Lemma 4.47 ist schließlich eine linear geordnete MV-Algebra lokal durch die łukasiewiczsche t-Norm darstellbar. Es folgt, daß es eine Belegung der Unteraussagen von φ mit Wahrheitswerten gibt, unter der φ einen von 1 verschiedenen Wert hat. Also ist dann φ nicht gültig. $\square$

6 Anhang: Einige Begriffe aus der Algebra

Wir stellen grundlegende, im Text verwendete Begriffe aus der Algebra zusammen.

Definition 6.1 Eine *algebraische Sprache* $\mathcal{L}$ bestehe aus abzählbar vielen *Konstanten* $c_1, \ldots$ und abzählbar vielen mit je einer *Stelligkeit* ≥ 1 verknüpften *Operationen* $f_1, \ldots$. Eine $\mathcal{L}$-Algebra ist ein Grundbereich A zusammen mit je einem Element für jede Konstante $c_i \in \mathcal{L}$ und je einer s_j-stelligen Operation für jede s_j-stellige Operation $f_j \in \mathcal{L}$.

Um die Darstellung übersichtlich zu halten, erklären wir im weiteren das meiste anhand von Algebren mit einer zweistellige Funktion f und einer Konstante c. Solche Algebren seien einfach als fc-Algebren bezeichnet; die Übertragung auf eine allgemeine Sprache ist offensichtlich. Eine solche, $\mathcal{L}$, sei für die übrigen Fälle fixiert.

Wir gehen nun die drei Standardmethoden durch, die dazu dienen, aus gegebenen Algebren neue zu konstruieren.

Definition 6.2 Es seien $(A; f_A, c_A)$ und $(B; f_B, c_B)$ fc-Algebren. Dann heißt eine Abbildung $h: A \to B$ ein *Homomorphismus*, falls für alle $a, b \in A$

$$h(f_A(a, b)) = f_B(h(a), h(b))$$

sowie $h(c_A) = c_B$ gilt.

Ein bijektiver Homomorphismus heißt *Isomorphismus*. Ein injektiver Homomorphismus heißt *isomorphe Einbettung*.

Ist der Homomorphismus h surjektiv, heißt B ein *homomorphes Bild* von A unter h.

Man beachte, daß, wenn $h: A \to B$ ein surjektiver Homomorphismus ist, die Operationen und Konstanten von B aus denen von A erschlossen werden können.

Definition 6.3 Es sei $(A; f, c)$ eine fc-Algebra. Es sei $B \subseteq A$ unter f abgeschlossen, d.h. $f(a, b) \in B$ für alle $a, b \in B$; und es gelte $c \in B$. Dann heißt die Algebra $(B; f, c)$, worin f die Einschränkung von f auf B ist, *Unteralgebra* von A.

Definition 6.4 Es sei I eine Indexmenge, und für jedes $\iota \in I$ sei $(A_\iota; f_\iota, c_\iota)$ eine fc-Algebra. Es sei $A = \Pi_{\iota \in I} = \{(a_\iota)_\iota \colon a_\iota \in A_\iota \text{ für } \iota \in I\}$ das Kreuzprodukt der A_ι, $\iota \in I$, d.h. die Menge all derjenigen Funktionen, die jedem $\iota \in I$ ein Element aus A_ι zuordnen. Weiter sei auf A die Operation f punktweise erklärt, d.h. gemäß

$$f((a_\iota)_\iota, (b_\iota)_\iota) = (f(a_\iota, b_\iota))_\iota,$$

sowie $c = (c_\iota)_\iota$ gesetzt. Dann heiße die Algebra $(A; f, c)$ *direktes Produkt* der A_ι, $\iota \in I$.

Wichtig im gegebenen Zusammenhang ist, daß die genannten Konstruktion die Gültigkeit von Gleichungen erhalten.

Satz 6.5 *Gilt eine Gleichung in einer Algebra A, so auch in jedem homomorphen Bild von A und in jeder Unteralgebra von A. Gilt eine Gleichung in jeder der Algebren A_ι, $\iota \in I$, so auch in deren direktem Produkt.*

Dies ist nicht schwierig nachzuprüfen und gibt Anlaß zur nächsten Definition.

Definition 6.6 Es sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Algebren, zu welcher mit einer Algebra A auch jedes homomorphe Bild von A und jede Unteralgebra von A und mit Algebren A_ι, $\iota \in I$, auch deren direktes Produkt gehört. Dann heiße $\mathcal{A}$ eine *$\mathcal{L}$-Varietät.*

Interessant ist, daß die Umkehrung von Satz 6.5 gilt - der Birkhoffsche Satz.

Satz 6.7 *Es sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Varietät. Dann gibt es eine Menge Σ von $\mathcal{L}$-Gleichungen, so daß eine $\mathcal{L}$-Algebra A genau dann zu $\mathcal{A}$ gehört, wenn in A alle Gleichungen aus Σ gelten.*

Definition 6.8 *Für eine $\mathcal{L}$-Varietät $\mathcal{V}$ bezeichne* Glch($\mathcal{V}$) *die Menge aller $\mathcal{L}$-Gleichungen, die in allen $A \in \mathcal{V}$ gelten.*

Dies heißt, daß man jede $\mathcal{L}$-Varietät $\mathcal{V}$ mit einer Menge von Gleichungen zwischen $\mathcal{L}$-Termen identifizieren kann - mit Glch($\mathcal{V}$) nämlich.

Satz 6.9 *Die $\mathcal{L}$-Varietäten bilden einen Verband unter der Teilmengenbeziehung.*

Definition 6.10 Es sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Algebren. Es sei $\mathcal{B}$ der Abschluß von $\mathcal{A}$ unter der Bildung von homomorphen Bildern, Unteralgebren und direkten Produkten. Dann heißt $\mathcal{B}$ die *von $\mathcal{A}$ erzeugte* Varietät.

Satz 6.11 *Es sei $\mathcal{B}$ die von einer Klasse $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}$-Algebren erzeugte Varietät. Dann enthält $\mathcal{B}$ exakt diejenigen $\mathcal{L}$-Algebren, in denen alle Gleichungen gelten, die in allen $A \in \mathcal{A}$ gelten.*

Wichtig in diesem Zusammenhang ist weiter die folgende Tatsache.

Definition 6.12 Es sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von $\mathcal{L}$-Algebren. Es sei A eine Algebra in $\mathcal{A}$ und A_0 eine Teilmenge von A, die A erzeugt, d.h. deren Abschluß unter den Operationen ganz A ist. Dann heiße A *in $\mathcal{A}$ frei* mit den *Erzeugenden* A_0, falls jede Abbildung von A_0 in ein $B \in \mathcal{A}$ zu einem Homomorphismus $A \to B$ ausgedehnt werden kann.

Man beachte, daß der Homomorphismus eindeutig ist.

Weiter ist nicht schwer zu zeigen, daß es in einer Klasse von Algebren zu jeder Kardinalität bis auf Isomorphie höchstens eine freie Algebra gibt.

Satz 6.13 *Es sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Varietät. Dann gibt es zu jeder Kardinalität λ eine in $\mathcal{A}$ freie Algebra mit λ Erzeugenden.*

Schließlich erwähnen wir den folgenden, ebenfalls von Birkhoff stammenden Satz, mit dem Satz 2.24 unmittelbar beweisbar ist. Denn die Menge von Gleichungen, mit denen die Varietät eines implikativen Kalküls definiert wird, ist abgeschlossen im folgenden Sinne.

Definition 6.14 Eine Menge von Gleichungen Σ in $\mathcal{L}$ heiße *abgeschlossen*, falls folgendes für alle $\mathcal{L}$-Terme $\varphi, \varphi_1, ..., \psi, \psi_1, ..., \chi$ gilt:

(i) $\varphi = \varphi$;

(ii) mit $\varphi = \psi$ ist auch $\psi = \varphi$ in Σ;

(iii) mit $\varphi = \psi$ und $\psi = \chi$ ist auch $\varphi = \chi$ in Σ;

(iv) für jede s-stellige Operation f in $\mathcal{L}$ liegt mit $\varphi_1 = \psi_1, \ldots, \varphi_s = \psi_s$ auch $f(\varphi_1, ..., \psi_1) = f(\varphi_s, ..., \psi_s)$ in Σ;

(v) mit $\varphi = \psi$ liegt auch jede Gleichung in Σ, die hieraus durch gleichmäßigen Austausch der Variablen durch beliebige Terme hervorgeht.

Satz 6.15 *Eine Menge von $\mathcal{L}$-Gleichungen Σ ist genau dann von der Form* Glch($\mathcal{V}$) *für eine Klasse $\mathcal{V}$ von $\mathcal{L}$-Algebren, wenn Σ abgeschlossen ist.*

Dies bedeutet, daß, wenn wir einer abgeschlossenen Menge Σ von Gleichungen die Varietät $\mathcal{V} = \mathrm{Var}(\Sigma)$ zuordnen, in dieser keine weiteren Gleichungen außer denen in Σ gelten. Denn $\Sigma = \mathrm{Glch}(\mathcal{W})$ für eine Klasse $\mathcal{W}$; es muß $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ gelten; und $\mathrm{Glch}(\mathcal{V}) \supseteq \Sigma = \mathrm{Glch}(\mathcal{W}) \supseteq \mathrm{Glch}(\mathcal{V})$, d.h. $\Sigma = \mathrm{Glch}(\mathcal{V})$.

Literatur

[AgMo] P. Agliano, F. Montagna, Varieties of BL-algebras. I: General properties, *J. Pure Appl. Algebra* **181** (2003), 105 - 129.

[Bir] G. Birkhoff, „Lattice theory“, AMS Colloquium Publications, Providence 1967 (3. Aufl.).

[CEGT] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens, Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua, *Soft Comp.* **4** (2000), 106 - 112.

[COM] R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, „Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning", Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 2000.

[EGHM] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek, F. Montagna, Hoops and fuzzy logic, *J. Log. Comput.* **13** (2003), 531 - 555.

[Fuc] L. Fuchs, „Partially ordered algebraic systems", Pergamon Press, Oxford 1963.

[Grae] G. Grätzer, „Universal algebra", Springer-Verlag, New York 1979 (2. Aufl.).

[Haj1] P. Hájek, „Metamathematics of fuzzy logics", Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1998.

[Haj2] P. Hájek, Basic fuzzy logic and BL-algebras, *Soft Comp.* **2** (1998), 124 - 128.

[Hoe] U. Höhle, Commutative, residuated l-monoids, in: U. Höhle et al. (Hg.), „Non-classical logics and their applications to fuzzy subsets. A handbook of the mathematical foundations of fuzzy set theory", Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1995; 53 - 106.

[JiTs] P. Jipsen, C. Tsinakis, A survey of residuated lattices, in: J. Martínez (ed.), "Ordered algebraic structures. Proceedings of the conference on lattice-ordered groups and f-rings (Gainesville 2001)", Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 2002; 19 - 56.

[Mon] J. D. Monk (Hg.), „Handbook of Boolean algebras", Band 1, North-Holland, Amsterdam 1989.

[RaSi] H. Rasiowa, R. Sikorski, „The mathematics of metamathematics", Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warschau 1963.

[Sik] R. Sikorski, „Boolean Algebras", Springer-Verlag, Berlin 1964 (2. Aufl.).