t-normbasierte mehrwertige Logiken

Thomas Vetterlein
Lehrstuhl Informatik 1, Universität Dortmund
Otto-Hahn-Straße 16, 44227 Dortmund
Thomas.Vetterlein@uni-dortmund.de

April 2004

Zusammenfassung

In diesem Bericht werden formale Systeme der Aussagenlogik vorgestellt, deren Besonderheit darin besteht, daß jede Formel durch ein kontinuierliches Spektrum von Wahrheitswerten belegt werden kann. Als Wahrheitswerte zugelassen sind außer den beiden Werten 0 für *nicht zutreffend* und 1 für *zutreffend* auch Grade an Zustimmung ausdrückende Zwischenwerte.

Die besprochenen Logiken besitzen als Grundverknüpfungen eine Konjunktion und eine Implikation, und es wird davon ausgegangen, daß erstere durch eine t-Norm und letztere durch das zugehörige Residuum interpretiert wird. Vorgestellt wird in aller Ausführlichkeit die Hájeksche Standardfuzzylogik, die sogenannte Basic Logic **BL**; es folgen in knapperer Form die łukasiewicssche, Produkt- und gödelsche Logik.

Jeweils mitbesprochen werden die algebraischen Pendants der einzelnen Logiken, d.h. deren Lindenbaumalgebren. Dies sind u.a. die MV- und die BL-Algebren.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mathematische Modellierung stützt sich auf formale Systeme zum logischen Schließen. Wenn für ein Problem, das mathematisch angegangen werden soll, ein adäquater formaler Rahmen gefunden ist, ist dieses Problem einerseits überhaupt erst präzisierbar und andererseits die Voraussetzung dafür geschaffen, es systematisch zu untersuchen. Die Frage sei einleitend gestellt, wie ein formaler Rahmen mit dem dazugehörigen logischen Kalkül prinzipiell eigentlich zustandekommt – um dann im weiteren diejenigen Systeme, um die es in diesem Text geht, d.h. die klassische bzw. nichtklassische Aussagenlogik, von ihrem Ansatz her einordnen zu können.

Ausgangspunkt für jede Formalisierung mit mathematischen Mitteln ist ein anschauliches Bild; Formalität kommt nicht von irgendwoher und ist auch kein Selbstzweck. Ausgegangen wird von ausgewählten anschaulichen Merkmalen, die Gegenständen in einer vorgegebenen Situation zukommen können. Es kann sich etwa um Längenmaße, um Aufenthaltsorte, um eine Anzahl oder alles sonstige handeln, was der Beschreibung eines Sachverhaltes dienlich ist. Die Beschreibung selbst ist sodann relativer Art: Man grenzt ein für einen Sachverhalt charakteristisches Merkmal gegen andere Möglichkeiten ab. So werden etwa Längen > 0 im Vergleich gesehen, ist eine Anzahl $n \geq 1$ dadurch charakterisiert, daß es sich um eines mehr als $n - 1$ handelt, und erfolgen Ortsangaben relativ zu anderen Orten. Insgesamt werden also Aussagen formalisiert, die eine Gegebenheit relativ zu anderen Gegebenheiten beschreiben, und Ziel ist es, alle richtigen solchen Aussagen auszusondern sowie systematisch die logischen Abhängigkeiten zwischen solchen Aussagen zu erforschen.

Die wesentlichen Schritte vom Inhaltlichen hin zum Entwurf eines konkreten Logikkalküls können wie folgt zusammengefaßt werden. Für die Aussagen, die ausgewählt sind, einen Sachverhalt zu beschreiben, ist eine klare Notationsweise festzulegen. Des weiteren ist die Gesamtstruktur der in Betracht gezogenen Charakteristika zu bestimmen und sind die Aussagen, ihrer syntaktischen Form entsprechend, an auf diese Struktur Bezug nehmende Inhalte zu binden. Durch diese beiden Schritte versetzt man sich in die Lage, definierte Vorgaben über den betrachteten Sachverhalt machen zu können. Der entscheidende Schritt ist schließlich der letzte: Man hat auf der Grundlage ihrer inhaltlichen Form eine eindeutige Vorgehensweise zu bestimmen, wie welche Aussagen aus anderen erschlossen werden können.

Eine Logik setzt sich dementsprechend aus drei Elementen zusammen:

- erstens einer Menge von Zeichenketten, dazu dienlich, die Aussagen, die formalisiert werden sollen, in definierter Weise zu notieren;
- zweitens einer Semantik, die beschreibt, auf welche Art inhaltlicher Strukturen sich welche Art so notierter Ausdrücke beziehen;
- und drittens einem Regelwerk, das festlegt, welche Ausdrücke aus welchen anderen bewiesen werden können.

Die eigentliche Aufgabe besteht hierbei darin, die Beweisregeln mit den möglichen Inhalten in Übereinstimmung zu bringen. Daß sich aus einer Aussage α eine zweite Aussage β erschließen läßt, muß stets inhaltlich passen: In jeder spezifischen Struktur, in der α zutrifft, muß auch β zutreffen. Idealerweise gilt auch die Umkehrung: Impliziert α β inhaltlich, sollte β aus α beweisbar sein.

Dies ist bereits das Grundschema; es soll als erstes für die wohl wichtigste Logik, die klassische Aussagenlogik, in eine konkrete Gestalt gebracht und einigermaßen im Detail erörtert werden. Im zweiten Teil folgt sodann der Übergang von der klassischen Logik, die zweiwertig ist, zu einer bestimmten mehrwertigen. Vorgegangen werden kann in beiden Fällen gemäß ein und derselben Linie; lediglich in gewissen Punkten sind Modifikationen vonnöten.

2 Klassische Aussagenlogik

2.1 Ansatz

Die klassischen Aussagenlogik unterscheidet sich wesentlich von Systemen, die wie etwa die Zahlentheorie mit Objekten und Prädikaten zu tun haben. Formalisiert werden nämlich Aussagen, die in einem ganz beliebig vorgegebenen Zusammenhang auftreten können. Ein konkreter Inhalt der Aussagen wird dabei gar nicht einbezogen und somit auch die Art von Situation, von der man ausgeht, nicht näher spezifiziert. Formalisiert werden nur Aussagen an und für sich, und die Rolle jeder solchen es ist, das Zutreffen oder das Nichtzutreffen eines völlig frei wählbaren Merkmals auszudrücken. An als wahr ableitbaren Sätzen werden sich folglich auch nur solche ergeben können, die unabhängig vom Inhalt der in ihnen vorkommenden Aussagen zutreffen.

Man hat sich also statt einer bestimmten einfach irgendeine Gegebenheit vorstellen, die hinsichtlich ausgewählter Merkmale variieren kann. Etwas suggestiver ausgedrückt, gehe man von einem System aus, das verschiedene Zustände annehmen kann; dabei werde jeder solche Zustand durch das Zutreffen oder Nichtzutreffen gewisser Ja-Nein-Aussagen eindeutig beschrieben. Jede Aussage hat einem Merkmal zu entsprechen, das für gewisse Zustände des gewählten Systems gilt und die übrigen nicht gilt.

Auch hier führt am ehesten ein Beispiel zum Verständnis. Wohl am einfachsten ist es, sich einen Gegenstand vorzustellen, der sich irgendwo innerhalb eines abgegrenzten Raumbereiches befinden kann; jedem räumlichen Teilbereich kann dann die Aussagen zugeordnet werden, daß sich der Gegenstand dort aufhält. Daß als mögliche Werte für die Aussagen genau zwei vorkommen, heißt dabei, daß der Gegenstand als entweder im entsprechenden Raumbereich befindlich oder sonst außerhalb desselben gedacht wird.

Um zu einem für diese Vorgabe ädaquaten logischen Kalkül zu gelangen, sind die folgenden Überlegungen maßgeblich.

Auszugegehen ist von einer Menge $\mathcal{P}$ von Aussagen, deren Inhalt die Wahrheitswerte 0 für *nicht zutreffend* oder 1 für *zutreffend* sein können. Die Aussagen seien so gewählt, daß gewissen Belegungen $v\colon\ \mathcal{P} \to \{0, 1\}$

dieser Aussagen mit Werten 0 und 1 die einzelnen Zustände eines vorgegebenen Systems entsprechen. Ist V die Menge aller hinsichtlich des gegebenen Systems möglichen Belegungen v: $\mathcal{P} \to \{0, 1\}$, läßt sich jede Aussage $\alpha \in \mathcal{P}$ mit der Teilmenge $\overline{\alpha} = \{v \in V\colon\ v(\alpha) = 1\}$ von V identifizieren. Insofern lassen sich die von der klassischen Aussagenlogik zu formalisierenden Aussagen als Teilmengen einer Grundmenge V begreifen, die ihrerseits aus allen aufgrund gewisser Vorgaben zugelassenen Belegungen der Aussagen mit 0 oder 1 gewonnen wird.

Der Sinn eines formalen Systems besteht nun darin, es zu ermöglichen, einer Vorgabe entsprechend gewisse Belegungen der Aussagen zuzulassen und andere auszuschließen. Dafür müssen Beziehungen zwischen verschiedenen Aussagen ausgedrückt werden können, was mittels logischer Verknüpfungsoperationen geschieht. Aussagen α und β sind etwa undverknüpfbar zur Aussage $\alpha \wedge \beta$: Es hat dazu $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$ für jede Belegung v zu gelten, worin „$\wedge$“ auf der rechten Seite die gewöhnliche Verknüpfung von Wahrheitswerten bedeutet. Ähnliches gilt für die Negation $\neg\alpha$. Es ist dann klar, daß die Undverknüpfung dem Durchschnitt der korrespondierenden Teilmengen von V entspricht und die Negation dem Komplement: $\overline{\alpha \wedge \beta} = \overline{\alpha} \cap \overline{\beta}$ und $\overline{\neg\alpha} = \complement\overline{\beta} = V \setminus \overline{\beta}$.

Eine weitere und nicht ganz so einfach definierbare Verknüpfungsoperation ist die der Implikation; der Ansatz ist der folgende. Die Aussage $\alpha \to \beta$ soll die Eigenschaft haben, zusammen mit α β zur Folge zu haben; und es soll sich um eine möglichst schwache, d.h. möglichst leicht zu beweisende Aussage mit dieser Eigenschaft handeln. Daß eine Aussage α stärker ist als β, heißt, daß α β impliziert, was wiederum bedeutet, daß β unter einer Belegung $v \in V$ stets der Wert 1 zugeordnet ist, wenn dies für α gilt; und dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn mengentheoretisch $\overline{\alpha} \subseteq \overline{\beta}$ gilt. Die schwächste Aussage, die undverknüpft mit α β impliziert, ist offenbar diejenige, die dem Komplement von $\overline{\alpha}$ relativ zu $\overline{\beta}$, d.h. $\complement\overline{\alpha} \cup \overline{\beta}$ entspricht. Folglich wird festgelegt, daß für jede Belegung v genau dann $v(\alpha \to \beta) = 1$ gilt, wenn $v(\alpha) = 0$ oder $v(\beta) = 1$ ist oder, anders ausgedrückt, wenn $v(\alpha) \leq v(\beta)$ gilt.

Ansatz für ein formales System ist damit gegeben: Aussagen werden aus Zeichen wie $\varphi, \ldots$ mittels der Verknüpfungoperationen $\wedge$, $\to$, $\neg$ geformt; vertretener Inhalt ist *zutreffend* oder *nicht zutreffend*; und die Beweisregeln sind so zu wählen, daß nach ihrer Anwendung der Inhalt *zutreffend* erhalten bleibt.

Es folgen die formalen Definitionen. Für weitergehende Fragen zum nachstehenden Teilabschnitt sei das Buch [RaSi] besonders empfohlen.

2.2 Definition und grundlegende Eigenschaften

Die vorstehenden Erwägungen zur klassischen Aussagenlogik lassen sich gemäß der folgenden Definition 2.1 in eine präzise Form bringen. Wesentlich ist im Hinblick auf das, was danach kommt, daß die Interpretation der Formeln mittels der zwei Wahrheitswerte 0 und 1 erfolgt, zusammen mit den üblichen logischen Verknüpfungsoperationen *und* und *impliziert*.

Man beachte, daß diese Definition wie alle folgenden ihrer Art als nur metamathematischer Natur, d.h. nicht im Rahmen eines mathematischen Formalismus zu begreifen ist; sie hat ja umgekehrt einen solchen Formalismus zum Gegenstand.

Definition 2.1 Die *klassische Aussagenlogik [classical propositional calculus*[1]*]*, kurz **KL**, besteht aus der Menge $\mathcal{P}$ von *Aussagen [propositions]*, der *Modellierungsrelation [satisfaction relation]* $\models$ und der *Beweisrelation [proof relation]* $\vdash$. Hierbei gilt:

- Die Aussagen von **KL** sind die durch folgende Regeln zustandegekommenen Zeichenketten: (i) $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ sowie 0 sind Aussagen, und zwar die sogenannt *atomaren*; (ii) mit α und β sind auch $\alpha \wedge \beta$ und $\alpha \rightarrow \beta$ Aussagen, wobei α und β, falls nicht atomar, in Klammern zu schließen sind.

[1]Zum besseren Vergleich mit der Literatur füge ich, sofern sinnvoll erscheinend, jeweils die englischen Termini mit an. Zu beachten ist allerdings, daß diese nicht immer einheitlich sind – „propositional“ kann auch „sentential“ heißen usw.

- Eine *Belegung [evaluation]* der Aussagen von **KL** ist eine Funktion v: $\mathcal{P} \to \{0,1\}$ derart, daß für alle Aussagen α und β gilt: $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$, $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$ und $v(0) = 0$, worin die Operationen $\wedge$ und $\to$ auf $\{0,1\}$ gemäß der rechts stehenden Tabelle erklärt sind.

a	b	$a \wedge b$	$a \to b$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

  Eine Aussage α heiße *gültig [valid] unter einer Belegung* v, in Zeichen $v \models \alpha$, falls $v(\alpha) = 1$. v heiße dann *Modell [model]* von α.

  Eine Aussage α heiße *gültig*, in Zeichen $\models \alpha$, falls $v \models \alpha$ für alle Belegungen v gilt.

- Die *Axiome [axioms]* von **KL** sind für beliebige Aussagen α, β, γ die folgenden:

  (K1) $[(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)] \to (\alpha \to \gamma)$,

  (K2) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$,
  $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$,

  (K3) $(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha)$,

  (K4) $[(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma)] \to [\alpha \to (\beta \wedge \gamma)]$,

  (K5) $[(\alpha \wedge \beta) \to \gamma] \to [\alpha \to (\beta \to \gamma)]$,
  $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \wedge \beta) \to \gamma]$,

  (K6) $0 \to \alpha$,

  (K7) $[(\alpha \to \beta) \wedge ((\alpha \to 0) \to \beta)] \to \beta$.

  Es sei Φ eine Menge von Aussagen; Φ heiße dann *Theorie [theory]* von **KL**. Ein *Beweis [proof]* der Aussage α aus Φ sei eine Sequenz $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $n \geq 1$, dergestalt, daß den Abschluß die Aussage $\gamma_n = \alpha$ bildet und daß γ_m, $1 \leq m \leq n$, entweder aus Φ stammt oder Axiom von **KL** ist oder sich Aussagen γ_i und $\gamma_i \to \gamma_m$ unter den vorhergehenden befinden. Eine Aussage α heiße *beweisbar [provable]* aus Φ, in Zeichen $\Phi \vdash \alpha$, falls es einen Beweis von α aus Φ gibt. α heiße *beweisbar*, in Zeichen $\vdash \alpha$, falls es beweisbar aus $\emptyset$ ist.

Die in einer Theorie enthaltenen Aussagen werden im weiteren ebenfalls als deren *Axiome* bezeichnet. – Auf die Beweisregel, gemäß deren aus α zusammen mit $\alpha \to \beta$ die Aussage β erschlossen werden kann, wird allgemein als *Modus ponens* Bezug genommen.

Neben den definitionsgemäß vorhandenen Verknüpfungen werden in der klassischen Aussagenlogik noch weitere verwendet, die formal aber nur als Abkürzungen zu verstehen sind.

Definition 2.2 In **KL** stehe

$$\neg\alpha \;\text{ für }\; \alpha \to 0,$$

$$1 \;\text{ für }\; \neg 0,$$

$$\alpha \vee \beta \;\text{ für }\; \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta).$$

Es soll nun hier nicht der ganze Apparat von **KL** entwickelt werden, da der Schwerpunkt auf der mehrwertigen Logik liegt. Um aber einen Eindruck davon zu vermitteln, in welcher Weise innerhalb **KL** Herleitungen funktionieren und wie kompliziert diese sind, selbst wenn es um vermeintlich einfache Zusammenhänge geht, sei das folgende Lemma angemerkt. Im Beweis sind die allermeisten Schritte ausgelassen.

Lemma 2.3 *Für Aussagen α und β sind in* **KL** *$\alpha \to \beta$ und $\neg\alpha \vee \beta$ wechselseitig auseinander beweisbar.*

Beweis (skizziert). Es sei $\alpha \to \beta$ vorausgesetzt. Aus $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$ folgt $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to \beta$ und weiter $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha) \to (\neg\beta \to 0)$ und $((\alpha \to \beta) \wedge \alpha \wedge \neg\beta) \to 0$. Hieraus läßt sich $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \wedge \neg\beta) \to 0)$ und mit dem Modus ponens weiter $(\alpha \wedge \neg\beta) \to 0$, d.h. $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ erschließen, woraus schließlich $\neg\alpha \vee \beta$ folgt.

Es sei $\neg\alpha \vee \beta$ vorausgesetzt. Es folgt $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$. Es gilt $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$ und weiter $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$; weiter folgt $((\neg\beta \wedge \alpha) \to 0) \to (\alpha \to \beta)$, d.h. $\neg(\neg\beta \wedge \alpha) \to (\alpha \to \beta)$. Mittels Modus ponens ergibt sich $\alpha \to \beta$. $\square$

Es wird i.a. auf die Belegungen der Aussagen einer Logik als die Semantik und auf das Beweisen als die Syntax Bezug genommen. Wie einleitend bereits angemerkt, ergibt eine Definition wie die vorstehende nur dann einen Sinn, wenn Syntax und Semantik zusammenpassen. Die sich natürlich ergebende Mindestanforderung ist: Die Beweisregeln müssen so beschaffen sein, daß eine Aussage mindestens dieselben Belegungen als Modelle besitzt wie diejenigen, aus denen sie bewiesen ist. Anzustreben ist des weiteren, daß aus gegebenen Aussagen *all* diejenigen beweisbar sind, deren Modelle die der Voraussetzungen umfassen.

Ist ersteres der Fall, heißen die Beweisregeln *korrekt [sound]*. Ist des weiteren eine Aussage gültig genau dann, wenn sie beweisbar ist, d.h. gilt $\models \alpha$, gdw $\vdash \alpha$, heißt die Logik *vollständig [complete]*. Ist für jede Theorie Φ eine Aussage α aus Φ genau dann beweisbar, wenn jedes Modell aller Axiome in Φ auch Modell von α ist, heißt die Logik *streng vollständig [strongly complete]*.

Für **KL** gilt strenge Vollständigkeit; um dies zu beweisen, wird hier in einer Weise vorgegangen, die sich unmittelbar auf den Fall mehrwertiger Logiken übertragen läßt. Dieser Abschnitt schließt mit einigen grundsätzlichen Eigenschaften von **KL**; der Vollständigkeitsbeweis folgt erst in Abschnitt 2.5.

Satz 2.4 *Die Logik* **KL** *erfüllt die Deduktionseigenschaft: Für jede Theorie Φ und Aussagen φ und ψ gilt $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, gdw $\Phi \vdash \varphi \to \psi$.*

Beweis. Es gelte $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, und es sei $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ der dazugehörige Beweis. Für $i = 1, \ldots, n$ sei induktiv gezeigt: $\Phi \vdash \varphi \to \gamma_i$; daraus folgt die Behauptung.

Ist γ_i ein Axiom von **KL** oder aus Φ oder gleich φ, ist dies klar. Es sei $j < i$ und γ_i das Ergebnis des auf γ_j und $\gamma_j \to \gamma_i$ angewendeten Modus ponens. Da dann nach Annahme $\Phi \vdash \varphi \to \gamma_j$ und $\Phi \vdash \varphi \to (\gamma_j \to \gamma_i)$ gilt, folgt $\Phi \vdash \varphi \to (\gamma_j \wedge (\gamma_j \to \gamma_i))$ und damit wegen $\vdash (\gamma_j \wedge (\gamma_j \to \gamma_i)) \to \gamma_i$ $\Phi \vdash \varphi \to \gamma_i$.

Gilt umgekehrt $\Phi \vdash \varphi \to \psi$, folgt mittels des Modus ponens $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. $\square$

Definition 2.5 Es sei Φ eine Theorie von **KL**.

Φ heiße *inkonsistent [inconsistent]*, falls aus ihr 0 beweisbar ist, und andernfalls *konsistent [consistent]*.

Φ heiße *vollständig [complete]*, falls Φ konsistent ist und für jede Aussage φ entweder $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$ gilt.

Satz 2.6 *Es sei Φ eine konsistente Theorie von* **KL**.

(i) *Φ kann zu einer vollständigen Theorie Φ' erweitert werden. Ist dabei die Aussage α aus Φ nicht beweisbar, kann Φ' so gewählt werden, daß α aus Φ' auch nicht beweisbar ist.*

(ii) *Eine Aussage α ist aus Φ beweisbar, gdw α in jeder Erweiterung von Φ zu einer vollständigen Theorie enthalten ist.*

Beweis. (i) Es sei eine Aussage α mit $\Phi \nvdash \alpha$.

Es sei $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung sämtlicher Aussagen von **KL**. Es sei $\Phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Phi$. Es gilt entweder $\Phi_0 \cup \{\varphi_0\} \nvdash \alpha$ oder $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi_0\} \nvdash \alpha$; denn andernfalls bewiese Φ aufgrund der Deduktionseigenschaft sowohl $\varphi_0 \to \alpha$ als auch $\neg\varphi_0 \to \alpha$, also auch α selbst. Trifft etwa die erste Möglichkeit zu, ist $\Phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_0 \cup \{\varphi_0\}$ eine weiterhin konsistente und α nicht beweisende Theorie; andernfalls ist dies $\Phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_0 \cup \{\neg\varphi_0\}$

In ähnlicher Weise sei Φ_2 aus Φ_1, Φ_3 aus Φ_2 usw. konstruiert. Dann ist $\Phi' \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i \Phi_i$ vollständig; und gälte $\Phi' \vdash \alpha$, so bereits $\Phi_i \vdash \alpha$ für ein i, was nicht der Fall ist.

(ii) folgt direkt aus Teil (i). $\square$

2.3 Die Lindenbaumalgebren: boolesche Algebren

Gemäß den einleitenden Bemerkungen besteht der Zweck der klassischen Aussagenlogik in der Formalisierung von Aussagen, die durch ihr Gelten oder Nichtgelten die unterschiedlichen Zustände eines irgendwie vorgestellten Systems reflektieren. Die Aussagen sind demgemäß mit einem System von Teilmengen zu identifizieren; jeder Aussage α war eine Teilmenge der Menge aller möglichen Belegungen der Aussagen mit Wahrheitswerten zugeordnet, die Teilmenge derjenigen Belegungen nämlich, die α auf 1 abbilden. Zu klären ist die Frage, inwiefern dieses Bild zum formalen System **KL** paßt.

Aussagen im Sinne von **KL** sind die Elemente von $\mathcal{P}$. Nun vertreten zwei Aussagen, die in **KL** bzw. in einer Theorie von **KL** als äquivalent bewiesen werden können, denselben Inhalt; denn ihnen wird, wie sich nachprüfen läßt, unter jeder zugelassenen Belegung $v: \mathcal{P} \to \{0,1\}$ von $\mathcal{P}$ mit Wahrheitswerten derselbe Wert zugewiesen. Dies ist der Anlaß dafür, im folgenden den Quotienten der Menge $\mathcal{P}$ aller Aussagen bezüglich der Relation zu bilden, daß Aussagen als äquivalent beweisbar sind; dieser Quotient heißt Lindenbaumalgebra.

In einer Lindenbaumalgebra sind die logischen Operatoren weiterhin definierbar, und die resultierende Struktur ist eine boolesche Algebra. Eine Lindenbaumalgebra von **KL** ist in der Tat einem System von Teilmengen isomorph, und diese läßt sich mittels der Menge aller Belegungen gerade so konstruieren wie eingangs beschrieben.

Definition 2.7 In **KL** stehe

$$\varphi \leftrightarrow \psi \text{ für } (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).$$

Ist Φ eine Theorie von **KL**, gelte $\varphi \leftrightarrow_\Phi \psi$, falls $\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Erläuterung zur Terminologie. Es sei A irgendeine Algebra; A sei z.B. mit der zweistelligen Operation $f\colon A \times A \to A$ ausgestattet. Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann heißt $\sim$ mit f *kompatibel*, falls für $a, b, a', b' \in A$ aus $a' \sim a$ und $b' \sim b$ $f(a', b') \sim f(a, b)$ folgt.

Es sei $[a]_\sim$ die Äquivalenzklasse von $a \in A$ bezüglich $\sim$ und $[A]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{[a]_\sim\colon a \in A\}$ der Quotient von A bezüglich $\sim$. Ist $\sim$ mit f kompatibel, läßt sich f elementweise auch auf $[A]_\sim$ definieren: Man setze $f([a]_\sim, [b]_\sim) \stackrel{\text{def}}{=} [f(a,b)]_\sim$.

Entsprechendes gilt für allfällige weitere Operationen von A, die zudem von beliebiger anderer Stelligkeit als 2 sein können.

Lemma 2.8 *Es sei Φ eine Theorie von* **KL**. *Dann ist $\leftrightarrow_\Phi$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Aussagen, die mit den Operationen*

$\wedge$ und $\rightarrow$ kompatibel ist. Folglich ist für Aussagen α und β

$$\begin{aligned} [\alpha]_\Phi \wedge [\beta]_\Phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \wedge \beta]_\Phi, \\ [\alpha]_\Phi \rightarrow [\beta]_\Phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \rightarrow \beta]_\Phi, \\ [\alpha]_\Phi \vee [\beta]_\Phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \vee \beta]_\Phi, \\ \neg[\alpha]_\Phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\neg\alpha]_\Phi, \end{aligned} \tag{1}$$

worin $[\cdot]_\Phi$ die jeweilige Äquivalenzklasse bezüglich $\leftrightarrow_\Phi$ bezeichnet, definierbar.

Beweis. Wenn Φ $\alpha' \leftrightarrow \alpha$ beweist, folgt $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha'$ und $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$, also $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha' \wedge \beta)$, und ähnlich ergibt sich $(\alpha' \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$. Es folgt die Kompatibilität von $\leftrightarrow_\Phi$ mit $\wedge$. Diejenige mit $\rightarrow$ folgt mithilft der Transitivität von $\rightarrow$, d.h. (K1). $\square$

Definition 2.9 Es sei Φ eine Theorie von **KL**. Dann heiße

$$\mathcal{L}_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \{[\varphi]_\Phi\colon\ \varphi \text{ ist Aussage von } \mathbf{KL}\},$$

ausgestattet mit den Operationen $\wedge$ und $\rightarrow$ gemäß (1) sowie der Konstanten $\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} [0]_\Phi$, die *Lindenbaumalgebra* von **KL** zur Theorie Φ.

Im weiteren werden die Lindenbaumalgebren von **KL** als abzählbare boolesche Algebren charakterisiert. Genau in diesem Sinne ist die Aussage zu verstehen, daß boolesche Algebren das algebraische Pendant zum Logikkalkül **KL** bilden.

Lemma 2.10 *Es sei $(\mathcal{L}_\Phi; \wedge, \rightarrow, \mathbf{0})$ die Lindenbaumalgebra einer Theorie Φ von **KL**. Dann wird mittels*

$$[\alpha]_\Phi \leq [\beta]_\Phi, \quad \textit{falls} \ \ \Phi \vdash \alpha \rightarrow \beta, \tag{2}$$

eine partielle Ordnung auf $\mathcal{L}_\Phi$ erklärt. Die Verknüpfung $\wedge$ stellt dabei das Infimum dar, $\vee$ das Supremum; $\mathbf{0}$ ist das kleinste, $\mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} [1]_\Phi$ das größte Element.

Beweis. Da $\alpha \to \alpha$ beweisbar ist, ist $\leq$ reflexiv. Da $\Phi \vdash \alpha \to \beta$ und $\Phi \vdash \beta \to \alpha$ $\Phi \vdash (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ und damit definitionsgemäß $\alpha \leftrightarrow_\Phi \beta$ impliziert, ist $\leq$ antisymmetrisch. Da schließlich aus $\Phi \vdash \alpha \to \beta$ und $\Phi \vdash \beta \to \gamma$ $\Phi \vdash \alpha \to \gamma$ folgt, ist $\leq$ auch transitiv und somit eine partielle Ordnung auf $\mathcal{L}_\Phi$.

Weiter gilt $\Phi \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$ und $\Phi \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$; und es impliziert $\Phi \vdash \gamma \to \alpha$ und $\Phi \vdash \gamma \to \beta$, daß $\Phi \vdash \gamma \to \alpha \wedge \beta$. Es folgt, daß $[\alpha \wedge \beta]_\Phi$ das Infimum von $[\alpha]_\Phi$ und $[\beta]_\Phi$ ist. Ähnlich ist zu ersehen, daß $[\alpha \vee \beta]_\Phi$ deren Supremum ist.

Wegen $0 \to \alpha$ und $\alpha \to 1$ ist $\mathbf{0}$ kleinstes und $\mathbf{1}$ größtes Element von $\mathcal{L}_\Phi$. $\square$

Definition 2.11 Eine Struktur $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ heißt boolesche Algebra, falls das folgende gilt.

(B1) $(L; \leq)$ ist ein distributiver Verband mit 0 und 1. D.h. für jedes Paar $a, b \in L$ existiert das Infimum $a \wedge b$ und Supremum $a \vee b$; und für $a, b, c \in L$ gilt stets

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

und es gibt ein kleinstes Element 0 und größtes 1.

(B2) $\neg$ ist eine Komplementfunktion auf L. D.h. für $a, b \in L$ gilt:

$$\begin{aligned} &a \wedge \neg a = 0 \text{ und } a \vee \neg = 1; \\ &\text{aus } a \leq b \text{ folgt } \neg b \leq \neg a; \\ &\text{und } \neg\neg a = a. \end{aligned}$$

Satz 2.12 *Es sei* $(\mathcal{L}_\Phi; \wedge, \to, \mathbf{0})$ *die Lindenbaumalgebra einer Theorie* Φ *von* **KL***; und es sei* $\leq$ *die auf* $\mathcal{L}_\Phi$ *gemäß* (2) *erklärte partielle Ordnung und* $\neg$ *die gemäß* (1) *erklärte Operation. Dann ist* $(\mathcal{L}_\Phi; \leq, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *eine boolesche Algebra; dabei sind* $\wedge$ *und* $\vee$ *die Verbandsoperationen und* $\to$ *das relative Komplement.*

Jede abzählbare boolesche Algebra ist in dieser Weise einer Theorie von **KL** *zugeordnet.*

Beweis. Gegeben sei eine Theorie Φ; zunächst ist zu zeigen, daß $\mathcal{L}_\Phi$ ein distributiver Verband mit 0 und 1 ist, der eine Komplementfunktion besitzt.

Gezeigt war durch Lemma 2.10, daß $(\mathcal{L}_\Phi, \leq)$ ein Verband mit kleinstem Element $\mathbf{0}$ und größtem $\mathbf{1}$ ist; $\wedge$ und $\vee$ sind die Verbandsoperationen.

Zudem läßt sich $((\gamma \to \neg\alpha) \wedge (\gamma \to \neg\beta)) \to (\gamma \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta))$ umschreiben gemäß $((\neg\gamma \vee \neg\alpha) \wedge (\neg\gamma \vee \neg\beta)) \to (\neg\gamma \vee \neg(\alpha \vee \beta)$ und weiter $(\gamma \wedge (\alpha \vee \beta)) \to ((\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta))$. Hieraus folgt die Distributivität.

Weiter gilt $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to 0$ und $\alpha \vee \neg\alpha$, und es gilt $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ sowie $\vdash \alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$; daher ist $\neg$ auf $\mathcal{L}_\Phi$ eine Komplementfunktion.

Schließlich gilt $(\alpha \to \gamma) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \beta)$; also ergibt die Verknüpfung mittels $\to$ in $\mathcal{L}$ jeweils das relative Komplement.

Umgekehrt sei $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ eine abzählbare boolesche Algebra. Für Elemente $a, b \in L$ sei $a \wedge b$ deren Infimum, $a \vee b$ deren Supremum, und $a \to b \overset{\text{def}}{=} \neg a \vee b$.

Jedem Element a sei ein Aussagensymbol φ_a zugeordnet und $\mathcal{P}$ die Menge der ausgehend von der Menge $\{\varphi_a : a \in L\}$ von Aussagensymbolen gebildeten Aussagen. Es sei $v : \mathcal{P} \to L$ definiert gemäß $v(\varphi_a) = a,\ v(0) = 0,\ v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta),\ v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$. Die Theorie Φ_L bestehe nun aus allen Aussagen α mit $v(\alpha) = 1$. Für jede aus Φ_L beweisbare Aussage α gilt dann $v(\alpha) = 1$, wie mittels Induktion über die Länge des zugehörigen Beweises ersichtlich ist. Also folgt für jedes Paar $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$ aus $\Phi_L \vdash \alpha \to \beta$, daß $v(\alpha \to \beta) = 1$, also $v(\alpha) \to v(\beta) = 1$ und somit $v(\alpha) \leq v(\beta)$ gilt. Ist umgekehrt $v(\alpha) \leq v(\beta)$, so $v(\alpha \to \beta) = 1$ und folglich $\Phi_L \vdash \alpha \to \beta$. Also gilt $\Phi_L \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, gdw $v(\alpha) = v(\beta)$, und es folgt, daß v einen Isomorphismus zwischen der Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_{\Phi_L}$ von Φ_L und L induziert. $\square$

2.4 Struktur boolescher Algebren

Den abstrakten Begriff einer booleschen Algebra kann man sich in besonders einfacher Weise vorstellen: Es handelt sich um eine Menge von Teilmengen einer fest gegebenen Grundmenge, zusammen mit der Mengeninklusion $\subseteq$, dem Mengenkomplement $\complement$ und den Konstanten leere Menge und ganze Menge. Diese Tatsache soll nun hergeleitet werden.

Der vorliegende Abschnitt ist unabhängig vom Rest lesbar. Für weitere Informationen über boolesche Algebren sei das Buch [Sik] empfohlen.

Satz 2.13 *Es sei V eine beliebige Menge, und es sei $\mathcal{L}$ eine Menge von Teilmengen von V, die die leere Menge enthält und unter Durchschnitts- und Komplementbildung abgeschlossen ist. Dann ist $(\mathcal{L}; \subseteq, \complement, \emptyset, V)$ eine boolesche Algebra.*

Beweis. Es ist offensichtlich, daß $(\mathcal{L}; \subseteq, \complement, \emptyset, V)$ alle Erfordernisse von Definition 2.11 erfüllt. □

Für die umgekehrte Richtung sind einige Vorbereitungen nötig. Aus einer gegebenen Algebra müssen irgendwie die Punkte der Grundmenge konstruiert werden; das geschieht mithilfe der maximalen Filter.

Definition 2.14 Es sei $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ eine boolesche Algebra. Eine Teilmenge F von L heiße *Filter*, falls (i) aus $a \in F$ und $a \leq b$ folgt, daß auch $b \in F$ ist, und (ii) aus $a, b \in F$ folgt, daß auch $a \wedge b \in F$ ist.

Ein Filter F von L heiße *maximal*, falls $F \subset L$ gilt, jedoch kein Filter F' existiert mit $F \subset F' \subset L$.

Lemma 2.15 *Es sei $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ eine boolesche Algebra.*

(i) *Ein Filter F von L ist maximal, gdw für jedes $a \in L$ genau eines der Elemente a oder $\neg a$ in F liegt.*

(ii) *Für Elemente $a, b \in L$ mit $a \not\leq b$ gibt es einen a enthaltenden, b jedoch nicht enthaltenden maximalen Filter.*

Beweis. (i) Es sei F maximaler Filter und $a \in L$. Dann kann höchstens eines der Elemente $a, \neg a$ in F liegen, da wegen $a \wedge \neg a = 0$ sonst $0 \in F$ und damit $F = L$ wäre. Angenommen sei weiter, daß weder a noch $\neg a$ in F liegt. Es sei dann F_a der von a und F erzeugte Filter; es ist offenbar $F_a = \{x\colon\ x \geq a \wedge y \text{ für ein } y \in F\}$. Nach Annahme muß

$F_a = L$ sein, also $\neg a \geq a \wedge y$ für ein $y \in F$ gelten. Daraus folgt $\neg a \geq (a \wedge y) \vee \neg a = y \vee \neg a \geq y$, also $\neg a \in F$ entgegen der Annahme.

Umgekehrt enthalte ein Filter F für jedes $a \in L$ genau eines der Elemente a und $\neg a$. Damit enthält er nicht jedes Element; und enthielte er eines mehr, so wäre etwa $a, \neg a \in F$, folglich $0 \in F$ und $F = L$.

(ii) Die Menge $\{x\colon\ x \geq a\}$ ist ein a, nicht jedoch b enthaltender Filter. Unter all den Mengen mit dieser Eigenschaft gibt es gemäß Zornschem Lemma eine maximale, etwa F. Angenommen sei, daß F kein maximaler Filter sei, daß also für ein $c \in L$ weder c noch $\neg c$ in F liegt. Es sei $F_c = \{x\colon\ x \geq c \wedge y \text{ für ein } y \in F\}$ der von c und F erzeugte Filter sowie $F_{\neg c}$ der von $\neg c$ und F erzeugte. Nach Voraussetzung enthalten sowohl F_c als auch $F_{\neg c}$ das Element b, womit $b \geq c \wedge y_1$ sowie $b \geq \neg c \wedge y_2$ für gewisse $y_1, y_2 \in F$ gilt. Mit $z = y_1 \wedge y_2 \in F$ folgt $b \geq (c \wedge z) \vee (\neg c \wedge z) = z$, also $b \in F$ im Widerspruch zur Annahme. □

Es folgt die Darstellung boolescher Algebren durch Systeme von Teilmengen.

Erläuterung zur Terminologie. Ein *Homomorphismus* ist eine Abbildung von einer Struktur in eine weitere desselben Typs, die alle Relationen, Funktionen und Konstanten erhält. Für boolesche Algebren heißt dies im Klartext das folgende; es seien $(L; \leq_L, \neg_L, 0_L, 1_L)$ und $(K; \leq_K, \neg_K, 0_K, 1_K)$ zwei boolesche Algebren. Eine Abbildung $h\colon\ L \to K$ ist dann ein Homomorphismus, falls für alle $a, b \in L$ aus $a \leq_L b$ $h(a) \leq_K h(b)$ folgt und für alle $a \in L$ $h(\neg_L a) = \neg_K h(a)$ gilt sowie $h(0_L) = 0_K$ und $h(1_L) = 1_K$ ist.

Ein Homomorphismus $h\colon\ L \to K$ heißt des weiteren *isomorphe Einbettung*, falls er injektiv ist. In diesem Fall ist L mit einer Unterstruktur von K identifizierbar.

Es verbleibt anzumerken, daß die Potenzmenge einer Menge X, d.h. die Menge aller Teilmengen von X, durch $\mathbf{P}X$ notiert wird.

Satz 2.16 *Es sei* $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra. Es sei* W *die Menge aller maximaler Filter von* L*. Es sei*

$$\rho\colon\ L \to \mathbf{P}W, \quad a \mapsto \{F \in W\colon\ a \in F\}.$$

Dann ist ρ *ein isomorphe Einbettung von* $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ *in* $(\mathbf{P}W; \subseteq, \complement, \emptyset, W)$*.*

Beweis. Es sei $a, b \in L$ mit $a \leq b$; dann gilt für jeden Filter F mit $a \in F$, daß auch $b \in F$ ist; es folgt $\rho(a) \subseteq \rho(b)$.

Es sei $a \in L$; dann gilt für jedes $F \in W$, weil es sich ja um einen maximalen Filter handelt, daß $\neg a \in F$, gdw $a \notin F$, daß also $F \in \rho(\neg a)$, gdw $F \notin \rho(a)$ ist; es folgt $\rho(\neg a) = \complement\rho(a)$.

Weiter ist offenbar $\rho(0) = \emptyset$ und $\rho(1) = V$. Es folgt, daß ρ ein Homomorphismus ist.

Es verbleibt zu zeigen, daß ρ injektiv ist. Es seien also $a, b \in L$ verschiedene Elemente; man darf annehmen, indem man ggf. a mit b vertauscht, daß $a \not\leq b$. Dann gibt es gemäß Lemma 2.15(ii) einen maximalen Filter F, der a, jedoch nicht b enthält. Also ist $F \in \rho(a)$, jedoch $F \notin \rho(b)$, d.h. insbesondere $\rho(a) \neq \rho(b)$. □

Dieser Satz liefert die gesuchte Darstellung einer booleschen Algebra durch Teilmengen einer fixen Grundmenge. Nun war allerdings eingangs eine etwas andere Methode beschrieben worden, wie man ausgehend von einem System von Aussagen ein passendes System von Teilmengen konstruieren kann; Grundmenge war die Menge aller Belegungen der Aussagen mit 0 und 1.

Der Zusammenhang zum Satz 2.16 kann wie folgt hergestellt werden. Gegeben sei eine Lindenbaumalgebra von **KL**, gemäß Satz 2.12 eine boolesche Algebra. Den Belegungen der Aussagen mit 0 und 1 entsprechen dann die Homomorphismen dieser Algebra in die zweielementige boolesche Algebra, d.h. die Algebra $(\{0,1\}; \leq, \neg, 0, 1)$, worin $0 \leq 1$, $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$ erklärt ist. Den Homomorphismen nach $\{0,1\}$ entsprechen wiederum genau die maximalen Filter, und zwar im Sinne des folgenden Lemmas.

Lemma 2.17 *Es sei* $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra. Ist* v: $L \to \{0,1\}$ *ein Homomorphismus in die zweielementige boolesche Algebra, so ist* $F = \{x \in L\colon\ v(x) = 1\}$ *ein maximaler Filter von* L.

Jeder maximale Filter von L *geht in dieser Weise aus genau einem Homomorphismus in die zweielementige boolesche Algebra hervor.*

Beweis. Es sei $v\colon\ L \to \{0,1\}$ ein Homomorphismus und F wie angegeben. Es folgt aus $v(a) = 1$ und $a \leq b$, daß $v(b) = 1$, sowie aus $v(a) = v(b) = 1$, daß $v(a \vee b) = 1$, weswegen F ein Filter ist. Da weiter aus $v(a) = 0$ $\ v(\neg a) = 1$ und aus $v(\neg a) = 0$ $v(a) = 1$ folgt, liegt entweder a oder $\neg a$, nicht aber beide, in F; also ist F maximal.

Ist umgekehrt F maximaler Filter, wird durch $v(a) = 1$, falls $a \in F$, $v(a) = 0$ sonst, ein Homomorphismus der gewünschten Art definiert.

Auf diese Weise ist eine Entsprechung hergestellt, die zweimal angewendet zum ursprünglich Gegebenen zurückführt. $\square$

Dieses Lemma ermöglicht eine Umformulierung des Satzes 2.16 wie folgt; vgl. Abschnitt 2.1.

Satz 2.18 *Es sei* $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra. Es sei* V *die Menge aller Homomorphismen von* L *in die zweielementige boolesche Algebra* $\{0, 1\}$. *Es sei*

$$\rho\colon\ L \to V, \quad a \mapsto \{v \in V\colon\ v(a) = 1\}.$$

Dann ist ρ *ein isomorphe Einbettung von* $(L; \leq, \neg, 0, 1)$ *in* $(\mathbf{P}V; \subseteq, \complement, \emptyset, V)$.

2.5 Vollständigkeit

Die Vollständigkeit von **KL** wird in zwei Schritten hergeleitet.

Ausgehend von Satz 2.12 läßt sich zunächst einmal das folgende zeigen. Die Semantik von **KL** kann von vornherein statt auf die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ genausogut auf boolesche Algebren oder - was dasselbe ist - auf Algebren von Teilmengen gegründet sein. Für diesen Kalkül Vollständigkeit zu zeigen ist besonders einfach.

Definition 2.19 Die *klassische Aussagenlogik mit algebraischer Semantik*, kurz $\mathbf{KL_{alg}}$, sei ähnlich definiert wie die klassische Aussagenlogik **KL**, jedoch:

- Eine Belegung der Aussagen von $\mathbf{KL_{alg}}$ ist eine Funktion $v\colon\ \mathcal{P} \to B$ von der Menge der Aussagen in eine boolesche Algebra $(B; \leq, \neg, 0, 1)$ derart, daß für alle α, β gilt: $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \wedge v(\beta)$, $v(\alpha \to \beta) = \neg v(\alpha) \vee v(\beta)$ und $v(0) = 0$.

  Eine Aussage α heiße gültig unter einer Belegung v, in Zeichen $v \models \alpha$, falls $v(\alpha) = 1$. v heiße dann Modell von α.

Eine Aussage α heiße gültig, in Zeichen $\models \alpha$, falls $v \models \alpha$ für alle Belegungen v gilt.

Satz 2.20 *Die Logik* $\mathbf{KL_{alg}}$ *ist streng vollständig.*

Beweis. Es sei Φ eine Theorie und φ eine Aussage von **KL**.

Ist φ aus Φ beweisbar, so gilt für jede Belegung $v\colon\ \mathcal{P} \to L\ \ v(\varphi) = 1$, sofern dies nur für alle Elemente von Φ gilt. Denn dies gilt auch für die Axiome von **KL**; und aus $v(\alpha \to \beta) = 1$ folgt $v(\alpha) \to v(\beta) = 1$, was äquivalent ist zu $v(\alpha) \leq v(\beta)$; zusammen mit $v(\alpha) = 1$ ergibt sich also $v(\beta) = 1$.

Es sei φ aus Φ nicht beweisbar. Das bedeutet $[\varphi]_\Phi < \mathbf{1}$ in der Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_\Phi$ von Φ; also ist φ unter der Belegung $v:\ \mathcal{P} \to \mathcal{L}_\Phi,\ \ \alpha \mapsto [\alpha]_\Phi$ nicht gültig, einer Belegung, unter der aber alle Elemente von Φ gültig sind. □

Es folgt schließlich der Vollständigkeitssatz für **KL** selbst.

Satz 2.21 *Die Logik* **KL** *ist streng vollständig.*

Beweis. Es sei Φ eine Theorie und φ eine Aussage von **KL**.

Ist φ aus Φ beweisbar, so folgt aus Satz 2.20, daß φ unter allen Belegungen mit den Wahrheitswerten 0 und 1 gültig ist, wenn dasselbe für alle Elemente von Φ gilt.

Es sei φ aus Φ nicht beweisbar. Gemäß Satz 2.6 gibt es eine Φ erweiternde vollständige Theorie Φ', die φ weiterhin nicht beweist. Es gilt also $[\varphi]_{\Phi'} \neq \mathbf{1}$ in der Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_{\Phi'}$ von Φ' im Gegensatz zu allen Axiomen aus Φ' und insbesondere allen aus Φ.

Nun gilt wegen der Vollständigkeit von Φ' für je zwei Aussagen α und β, daß Φ' eine der vier Aussagen $\neg\alpha \wedge \neg\beta,\ \ \neg\alpha \wedge \beta,\ \ \alpha \wedge \neg\beta,\ \ \alpha \wedge \beta$ beweist und folglich mindestens eine der Implikationen $\alpha \to \beta$ oder $\beta \to \alpha$. Hieraus aber folgt $[\alpha]_{\Phi'} \leq [\beta]_{\Phi'}$ bzw. $[\beta]_{\Phi'} \leq [\alpha]_{\Phi'}$; folglich ist $\mathcal{L}_{\Phi'}$ linear geordnet.

Eine linear geordnete boolesche Algebra mit mehr als nur einem Element ist notwendig die zweielementige. Daher ist $v\colon\ \mathcal{P} \to \mathcal{L}_{\Phi'},\ \ \alpha \mapsto$

$[\alpha]_{\Phi'}$ als eine Belegung mit Wahrheitswerten auffaßbar, unter der alle Elemente von Φ den Wert 1 haben, φ jedoch nicht. □

Satz 2.22 *Eine Theorie von* **KL** *ist konsistent, gdw wenn sie mindestens ein Modell besitzt.*

Beweis. Ist eine Theorie Φ konsistent, also 0 nicht beweisbar, kann Φ zu einer vollständigen und insbesondere weiterhin konsistenten Theorie Φ' erweitert werden. Wie im vorstehenden Beweis des Satzes 2.21 ist die Belegung mit Elementen der Lindenbaumalgebra von Φ' als Belegung mit Wahrheitswerten auffaßbar, und diese ist ein Modell von Φ.

Hat umgekehrt Φ ein Modell, d.h. gibt es eine Belegung v, unter der alle Elemente von Φ den Wahrheitswert 1 haben, gilt dies auch für alle Konsequenzen von Φ. Unter den letzteren kann die Aussage 0 demzufolge nicht sein. □

3 Die Standard-Fuzzyaussagenlogik

3.1 Ansatz

Zahlreiche der bekannten nichtklassischen Logikkalküle können als Abwandlungen der klassischen Logik begriffen werden; im vorliegenden Fall ist dies nicht anders. Grundsätzlich kann an der grundlegenden Definition 2.1 in zweierlei Hinsicht etwas geändert werden: zum einen auf syntaktischer Seite, zum anderen auf der semantischen.

Beispiel für den erstgenannten Fall ist etwa die intuitionistische Logik. Diese geht aus **KL** dadurch hervor, daß gewisse Beweisregeln nicht übernommen werden; konkret wird das letzte der Axiome, (K7), welches $\alpha \vee \neg\alpha$ impliziert, verworfen. Der Einwand von intuitionistischer Seite gegen (K7) geht in die folgende Richtung: In **KL** bzw. **KL** enthaltenden Kalkülen ist auf Grundlage von (K7) eine Aussage der Form $\varphi \vee \psi$ derweil dadurch beweisbar, daß aus $\neg\varphi\wedge\neg\psi$ ein Widerspruch hergeleitet wird; dann aber ist nicht unbedingt bestimmbar, ob eigentlich φ oder ψ die zutreffende Aussage ist; d.h. nicht notwendig ist dann entweder φ oder ψ beweisbar.

Die intuitionistische Aussagenlogik wird in der Folge auf syntaktischer Basis definiert; die Beweisregeln sind die von **KL** plus Entsprechungen von (K2)-(K4) für die Disjunktion $\vee$, jedoch unter Weglassung von (K7). Eine **KL** vergleichbare auf Wahrheitswerten beruhende Semantik gibt es dann nicht mehr. Es gibt aber eine Semantik nach der Art von $\mathbf{KL_{alg}}$; modellierbar sind Formeln der intuitionistischen Logik statt durch boolesche durch pseudoboolesche Algebren.

Der vorliegende Text ist allerdings mit einer Variation der klassischen Aussagenlogik von einer Art befaßt, die auf einer Abwandlung der Semantik beruht. Die Idee ist die folgende und schließt sich an die Überlegungen zu **KL** unmittelbar an.

KL geht von irgendeinem anschaulichen System aus, dessen Zustände mittels Aussagen adäquat beschreibbar sind, die ein Zutreffen oder Nichtzutreffen ausdrücken. Die mehrwertigen Logiken, um die es im weiteren geht, formalisieren demgegenüber Aussagen, deren Wahrheitswertbestimmung auf allgemeinere Weise funktioniert; es kann sich etwa um das Ergebnis einer menschlichen Einschätzung oder einer ungenauen Messung handeln. Das heißt: Auszugehen ist von einem System, dessen Gestalt weiterhin durch eine Reihe von Aussagen beschrieben wird, deren Wahrheitswerte diesmal aber alle reellen Werte zwischen 0 und 1 annehmen dürfen.

Typisches Beispiel sei wiederum die Lage eines Gegenstandes im Raum. Formalisiert werden nicht nur Aussagen der Form „Der Gegenstand liegt innerhalb einer Kugel des Radius r um den Punkt x", sondern auch allgemeinere der Form „Der Gegenstand liegt in der Gegend des Punktes x" oder etwas spezifischer „Der Gegenstand liegt im Raumbereich ρ", worin $\rho\colon\ \mathbb{R}^3 \to [0,1]$ eine um den Punkt x herum konzentrierte Fuzzymenge darstellt.

Ausgegangen wird also wieder von gewissen Aussagen $\mathcal{P}$ einer Art, daß einer Belegung $v\colon\ \mathcal{P} \to [0,1]$ dieser Aussagen mit Werten zwischen 0 und 1 ein Zustand des vorgegebenen Systems entspricht. Diesmal jedoch wird dieser Zustand im allgemeinen nur ungefähr spezifiziert. Um dies einzusehen, betrachte man etwa zwei sich wechselseitig ausschließende Aussagen, wie z.B. den Aufenthalt eines Gegenstandes in sich nicht überlappenden Raumregionen. Dann kommt im klassischen Fall maximal einer dieser Aussagen der Wahrheitswert 1 zu, womit eine der beiden Raumbereiche ausgeschlossen werden kann. Im Fall unscharfer Daten hingegen können beide Aussagen z.B. den Wert $\frac{1}{3}$ haben, womit beide Regionen im Bereich des Möglichen bleiben.

Es sei V wieder die Menge aller für das gegebene System möglichen Belegungen $v\colon\ \mathcal{P} \to [0,1]$. Dann ist eine Aussage $\alpha \in \mathcal{P}$ nunmehr mit der Fuzzymenge $\overline{\alpha}\colon\ V \to [0,1],\ \ v \mapsto v(\alpha)$ auf V identifizierbar. Auf diese Weise lassen sich die im Rahmen der Fuzzylogik formalisierten Aussagen als Fuzzymengen einer Grundmenge V begreifen, gänzlich analog zum klassischen Fall.

Die entscheidende Frage aus logischer Sicht ist nun, wie zwei unscharfe Wahrheitswerte miteinander verknüpft werden sollen; denn auch in der Fuzzylogik sollen zwei Aussagen α und β beispielsweise zu einer Konjunktion, notiert als $\alpha \odot \beta$, verknüpft werden können. Ist nun α der Wert $0,6$, β $0,7$ zugeordnet, welcher Wert soll $\alpha \odot \beta$ zukommen?

Für die Wahl der logischen Verknüpfungen auf der Menge $[0,1]$ der Wahrheitswerte bieten sich recht vielfältige Möglichkeiten; es sei zunächst das wohl bekannteste Beispiel einer Fuzzylogik herangezogen, die łukasiewiczsche unendlichwertige, kurz **ŁL**. Hier ist die Konjunktion als derjenige Wert erklärt, um den die Summe der Einzelwerte über 1 hinausgeht, oder, wenn sie unter 1 bleibt, als 0:

$$\odot\colon\ [0,1]^2 \to [0,1],\ \ (a,b) \mapsto\ \max\,\{a+b-1, 0\}. \tag{3}$$

Der Wahrheitswert einer durch $\odot$ zusammengesetzten Aussage errechnet sich dann wie gewohnt aus denen der zugrundeliegenden Aussagen gemäß $v(\alpha \odot \beta) = v(\alpha) \odot v(\beta)$ für eine Belegung v. Identifiziert man insbesondere wie vorstehend α mit $\overline{\alpha}$ und β mit $\overline{\beta}$, ergibt sich $\overline{\alpha \odot \beta}\colon\ V \to [0,1],\ \ v \mapsto v(\alpha) \odot v(\beta)$, d.h. die korrespondierenden Fuzzymengen werden einfach punktweise $\odot$-verknüpft. Entsprechendes gilt auch für alle übrigen Verknüpfungen.

Trifft unter einer gegebenen Belegung also etwa φ zum Grade $0,6$ und ψ zum Grade $0,7$ zu, so **ŁL** zufolge $\varphi \odot \psi$ zum Grade $0,3$. Eine tiefergehende Rechtfertigung dieses Vorgehens scheint unmöglich; verbreitet ist es dennoch. Besser einsehbar ist die in **ŁL** mögliche Definition der Standardnegation; definiert man $\neg\alpha = \alpha \to 0$ und setzt man wieder voraus, daß $v(\neg\alpha) = \neg v(\alpha)$ für jedes v, ergibt sich $\neg$ einfach als die Substraktion von 1:

$$\neg\colon\ [0,1] \to [0,1],\ \ a \mapsto 1-a.$$

Schließlich enthalten alle besprochenen Fuzzylogiken eine Verknüpfung für die Implikation. Diese ist nach dem folgenden einheitlichen und mit den Erwägungen für die klassische Logik **KL** konsistenten Prinzip erklärt: $\alpha \to \beta$ soll die schwächste Aussage sein, die zusammen mit α ausreicht, um β zu erschließen. Diesmal gilt α als stärker als β, wenn β unter jeder Belegung $v \in V$ ein größerer Wert zugeordnet ist als α; und dies heißt gerade $\overline{\alpha} \subseteq \overline{\beta}$, worin $\subseteq$ die Inklusionsrelation für Fuzzymengen ist. Die schwächste Aussage, die $\odot$-verknüpft mit α β impliziert, hat somit unter der Belegung v den Wert $\max\,\{x \in [0,1]\colon x \odot v(\alpha) \leq v(\beta)\} = \min\,\{1 - v(\alpha) + v(\beta), 1\}$. Es ergibt sich die Definition $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$, wobei

$$\to\colon\ [0,1]^2 \to [0,1],\ \ (a,b) \mapsto\ \min\,\{1-a+b, 1\} \tag{4}$$

gesetzt ist.

Für die Logik **BL** ist die Standardreferenz das Buch [Haj1]. Speziell für die łukasiewiczsche Logik sei auf [CiOtMu] hingewiesen.

3.2 Definition und grundlegende Eigenschaften

Die Fuzzylogik formalisiert Aussagen, die mit dem ganzen Spektrum von Wahrheitswerten zwischen 0 und 1 belegt werden können. Verknüpfungsoperatoren sind $\odot$ für eine Konjunktion und $\rightarrow$ für die Implikation; Konstante für die falsche Aussage ist die 0; und nur in manchen Versionen, nicht in den hier besprochenen, tritt noch explizit eine Negation $\sim$ auf.

Die Semantik einer Aussagenlogik auf kontinuierliche Wahrheitswerte aufbauen zu können setzt als erstes, wie oben festgestellt, eine Lösung des folgende Problems voraus: Ist α mit dem Wert $a \in [0,1]$ belegt, β mit dem Wert $b \in [0,1]$, welche Zahl zwischen 0 und 1 kommt unter dieser Belegung der Aussage $\alpha \odot \beta$ zu? Gesucht ist also eine Funktion $\odot\colon\ [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, welche in vernünftiger Weise die Verknüpfung $\odot$ interpretiert. Eine kanonische solche gibt es nicht, weshalb man zunächst einmal die Mindestforderungen festlegt, wie sie in folgender Definition enthalten sind.

Definition 3.1 Eine Funktion $\odot\colon\ [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ heiße *t-Norm*, falls sie kommutativ, assoziativ und in beiden Variablen monoton ist und 1 bezüglich ihrer ein Neutrales ist. Eine t-Norm heiße *stetig*, falls sie dies bezüglich der gewöhnlichen Topologien ist.

Als zweites ist zu gegebener Wahl von $\odot$ festzulegen, wie $\rightarrow$ interpretiert werden soll. Hierfür soll wie oben ausgeführt der folgende Ansatz zum Tragen kommen: $\alpha \rightarrow \beta$ sei die schwächste Aussage ξ mit der Eigenschaft, daß aus $\xi \odot \alpha$ die Aussage β ableitbar ist. Für die Berechnung der Wahrheitswerte ergibt sich, ganz wie oben im speziellen Fall der łukasiewiczschen Logik, das folgende.

Definition 3.2 Es sei $\odot\colon\ [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ eine t-Norm; zu jedem Paar $a, b \in [0,1]$ existiere ein größtes $x \in [0,1]$ mit der Eigenschaft $x \odot a \leq b$. Dann heiße die Funktion

$$\rightarrow\colon\ [0,1]^2 \rightarrow [0,1], \quad (a,b) \mapsto\ \max\,\{x \in [0,1]\colon\ x \odot a \leq b\}$$

das zu $\odot$ gehörige *Residuum*.

Nicht für alle t-Normen läßt sich ein Residuum definieren, wohl aber für alle stetigen.

Satz 3.3 *Eine t-Norm besitzt genau dann ein Residuum, wenn sie in einer ihrer Variablen linksseitig stetig ist.*

Beweis. Da $\odot$ kommutativ ist, ist $\odot$ in der ersten Variable linksseitig stetig, gdw dies für die zweite Variable gilt.

Ist $\odot$ in der ersten Variable linksseitig stetig, ist $a, b \in [0,1]$ und $c = \bigvee\{x \in [0,1]\colon\ x \odot a \leq b\}$, so folgt $c \odot a \leq b$, womit $a \rightarrow b$ existiert.

Existiert die Residuumsfunktion, ist $a, a_1, a_2, \ldots, b \in [0,1]$ mit $a = \bigvee a_i$, so ist $\max\{x\colon\ x \odot b \leq \bigvee_i (a_i \odot b)\} \geq a$ und wegen der Monotonie von $\odot$ folglich $\bigvee_i (a_i \odot b) \leq a \odot b \leq \bigvee_i (a_i \odot b)$, d.h. $\bigvee_i (a_i \odot b) = \bigvee a_i \odot b$. Also ist für jedes feste b die Funktion $\cdot \odot b$ linksseitig stetig. $\square$

Beispiel 3.4 Die drei Standardbeispiele für t-Normen sind die folgenden. Die *łukasiewiczsche* t-Norm $\odot$ und das zugehörige Residuum $\rightarrow$ sind die gemäß (3) und (4) definierten Funktionen. Des weiteren ist

$$\begin{aligned} \odot\colon\ & [0,1]^2 \rightarrow [0,1], \quad (a,b) \mapsto ab, \\ \rightarrow\colon\ & [0,1]^2 \rightarrow [0,1], \quad (a,b) \mapsto \begin{cases} \frac{b}{a} & \text{für } a \geq b, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

die *Produkt*-t-Norm mit Residuum und schließlich

$$\begin{aligned} \odot\colon\ & [0,1]^2 \rightarrow [0,1], \quad (a,b) \mapsto \min\{a,b\}, \\ \rightarrow\colon\ & [0,1]^2 \rightarrow [0,1], \quad (a,b) \mapsto \begin{cases} b & \text{für } a \geq b, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

die *gödelsche* t-Norm mit Residuum.

Aus diesen Standardbeispielen lassen sich mit folgener Methode weitere t-Normen erzeugen. Daß es sich dabei bereits um den allgemeinsten Fall handelt, wird erst am Ende der Ausführungen über **BL** klar sein können.

Beispiel 3.5 Es seien I_ι, $\iota \in K$, paarweise disjunkte in $[0,1]$ liegende Intervalle, deren jedes entweder von der Form $I_\iota = [l_\iota, r_\iota)$ oder $I_\iota = (l_\iota, r_\iota)$ für gewisse $l_\iota, r_\iota \in [0,1]$, $l_\iota < r_\iota$, sei. Weiter seien h_ι ordnungserhaltende Homöomorphismen von I_ι nach $[0,1)$ bzw. nach $(0,1)$.

Dann sei $\odot\colon\ [0,1]^2 \to [0,1]$ wie folgt erklärt. Es sei $a, b \in [0,1]$. Liegen für ein $\iota \in I$ sowohl a als auch b im Intervall I_ι und ist I_ι nach links abgeschlossen, sei $a \odot b = h_\iota^{-1}(h_\iota(a) \odot_L h_\iota(b))$, worin $\odot_L$ die łukasiewiczsche t-Norm sei. Liegen für ein $\iota \in I$ a wie b in I_ι und ist I_ι offen, sei $a \odot b = h_\iota^{-1}(h_\iota(a) \odot_P h_\iota(b))$, worin $\odot_P$ die Produkt-t-Norm sei. Liegen a und b nicht in ein und demselben Intervall, so sei $a \odot b = \min\{a, b\}$.

Wie man überprüfen mag, ist dann $\odot$ eine t-Norm.

Nun lassen sich auf der Grundlage aller drei genannten Standard-t-Normen jeweils eigene Logiken konstruieren; so ist etwa die łukasiewiczsche Aussagenlogik diejenige, die genau die folgenden Aussagen α beweist: Unter jeglicher Belegung aller Aussagen mit Werten aus $[0,1]$ errechnet sich der Wahrheitswert von α zu 1, wenn $\odot$ durch die t-Norm (3), $\to$ durch das dazugehörige Residuum (4) und 0 durch 0 interpretiert wird. Die hier zunächst vorgestellte, von P. Hájek eingeführte Fuzzylogik ist allgemeinerer Natur; sie ist die Logik *aller* stetigen t-Normen und zugehörigen Residua in folgendem Sinn.

Definition 3.6 Die *Standard-Fuzzyaussagenlogik [Basic Logic]*, kurz **BL**, besteht aus der Menge $\mathcal{P}$ von Aussagen, der Modellierungsrelation $\models$ und der Beweisrelation $\vdash$. Hierbei gilt:

- Die Aussagen von **BL** sind die durch folgende Regeln zustandegekommenen Zeichenketten: (i) $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ sowie 0 sind Aussagen; (ii) mit α und β sind auch $\alpha \odot \beta$ und $\alpha \to \beta$ Aussagen, wobei α und β, falls nicht atomar, in Klammern zu schließen sind.

- Es sei $\odot$ eine stetige t-Norm und $\to$ das zu $\odot$ gehörige Residuum. Dann sei eine *zu $\odot$ gehörige Belegung* der Aussagen von **BL** eine Funktion $v\colon\ \mathcal{P} \to [0,1]$, so daß für alle Aussagen α und β gilt: $v(\alpha \odot \beta) = v(\alpha) \odot v(\beta)$, $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$ sowie $v(0) = 0$.

  Es sei v eine zu einer stetigen t-Norm $\odot$ gehörenden Belegung. Dann heiße eine Aussage α gültig unter der Belegung v, in Zeichen $v \models \alpha$, falls $v(\alpha) = 1$. v heiße dann Modell von α.

Eine Aussage α heiße gültig, in Zeichen $\models \alpha$, falls $v \models \alpha$ für jede zu einer stetigen t-Norm gehörigen Belegung v gilt.

- Die Axiome von **BL** sind für beliebige Aussagen α, β, γ die folgenden:

  (F1) $[(\alpha \to \beta) \odot (\beta \to \gamma)] \to (\alpha \to \gamma)$,

  (F2) $\alpha \odot \beta \to \alpha$,
  $\alpha \odot \beta \to \beta$,

  (F3) $\alpha \odot \beta \to \beta \odot \alpha$,

  (F4) $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to [\beta \odot (\beta \to \alpha)]$,

  (F5) $[(\alpha \odot \beta) \to \gamma] \to [\alpha \to (\beta \to \gamma)]$,
  $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \odot \beta) \to \gamma]$,

  (F6) $0 \to \alpha$,

  (F7) $[((\alpha \to \beta) \to \gamma) \odot ((\beta \to \alpha) \to \gamma)] \to \gamma$.

  Es sei Φ eine Menge von Aussagen von **BL**; Φ heiße dann Theorie von **BL**. Ein Beweis der Aussage α aus Φ sei eine Sequenz $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \quad n \geq 1$, dergestalt, daß den Abschluß die Aussage $\gamma_n = \alpha$ bildet und daß $\gamma_m, \; 1 \leq m \leq n$, entweder aus Φ stammt oder Axiom von **KL** ist oder die Aussagen γ_i und $\gamma_i \to \gamma_m$ unter den vorhergehenden sind. Eine Aussage α heiße *beweisbar* aus Φ, in Zeichen $\Phi \vdash \alpha$, falls es einen Beweis von α aus Φ gibt. α heiße *beweisbar*, in Zeichen $\vdash \alpha$, falls es beweisbar aus $\emptyset$ ist.

Die Beweisregeln von **BL** sind recht gut mit denen von **KL** vergleichbar, wenn man $\odot$ als das Analogon von $\wedge$ betrachtet. Es seien die Unterschiede kurz skizziert.

Zum ersten ist $\alpha \odot \beta$ nicht mehr notwendig die schwächste α und β implizierende Aussage. Eine solche zu definieren ist allerdings möglich, es handelt sich um den Ausdruck $\alpha \odot (\alpha \to \beta)$ – s. nachfolgende Definition 3.7. Daß dieser Ausdruck tatsächlich die Funktion eines Infimums hat, ist die Folge des neuen Axioms (F4), dessen Sinn ansonsten nicht weiter begründbar ist.

Zum zweiten enthält die Sprache von **BL** keine Negation im eigentlichen Sinne. In derselben Weise wie in **KL** führt man zwar $\neg\alpha$ ein – s. Definition 3.7. Die neue Verknüpfung ist im Unterschied zu **KL** jedoch im allgemeinen nicht involutiv. Fordert man dies, gelangt man zur łukasiewiczschen Logik.

Dem entspricht, daß wie in der intuitionistischen Logik das *Tertium non datur* (K7) nicht gefordert ist. Dies hat hier jedoch in der mehrwertigen Logik keinen sonderlich tiefgreifenden Hintergrund; es muß eben nicht notwendig ein Wahrheitswert a entweder selbst oder die wie auch immer erklärte Negation von a den Wert 1 haben. Fordert man (K7), gelangt man gerade zur Logik **KL**, die Identifizierung von $\odot$ mit $\wedge$ vorausgesetzt.

Auf der anderen Seite ist in **BL** das Axiom (F7) neu und darf als abgeschwächte Form des *Tertium non datur* angesehen werden. Einen tieferen Sinn in (F7) zu finden ist allerdings ähnlich schlecht möglich wie im Fall von (F4).

Definition 3.7 In **BL** stehe

$$\alpha \wedge \beta \text{ für } \alpha \odot (\alpha \to \beta),$$

$$\alpha \vee \beta \text{ für } [(\alpha \to \beta) \to \beta] \wedge [(\beta \to \alpha) \to \alpha],$$

$$\neg\alpha \text{ für } \alpha \to 0,$$

$$1 \text{ für } \neg 0.$$

Das folgende Lemma beweist neben der Selbstimplikation die wichtigsten Eigenschaften der $\odot$-Verknüpfung.

Lemma 3.8 *In* **BL** *gilt das folgende.*

(i) *Es gilt* $\vdash \alpha \to \alpha$.

Aus $\vdash \alpha$ *und* $\vdash \beta$ *folgt* $\vdash \alpha \odot \beta$.

(ii) $\vdash (\alpha \odot \beta) \odot \gamma \to \alpha \odot (\beta \odot \gamma)$;

$\vdash \alpha \odot \beta \to \beta \odot \alpha$;

$\vdash \alpha \to \alpha \odot 1$.

(iii) $\vdash (\alpha \to \beta) \to [(\gamma \odot \alpha) \to (\gamma \odot \beta)]$.

Beweis. (i) Es sei ξ eine beliebige beweisbare Aussage. Es gilt $(\xi \odot \alpha) \to \alpha$, also $\xi \to (\alpha \to \alpha)$ und damit $\alpha \to \alpha$.

Aus $(\alpha \odot \beta) \to (\alpha \odot \beta)$ folgt $\alpha \to (\beta \to (\alpha \odot \beta))$. Sind α und β beweisbar, folgt $\alpha \odot \beta$.

(ii) Die zweite Behauptung gilt gemäß (F3).

$[(\alpha \odot \beta) \odot \gamma] \to [(\alpha \odot \beta) \odot \gamma]$ läßt sich umschreiben nach $\alpha \to (\beta \to (\gamma \to [(\alpha \odot \beta) \odot \gamma])))$ und weiter nach $[\alpha \odot (\beta \odot \gamma)] \to [(\alpha \odot \beta) \odot \gamma]$.

Aus $(1 \odot \alpha) \to (1 \odot \alpha)$ folgt $1 \to (\alpha \to (1 \odot \alpha)$, und da 1 nach (i) beweisbar ist, gilt $\alpha \to (1 \odot \alpha)$.

(iii) Aus $\gamma \odot \beta \to \gamma \odot \beta$ folgt $\gamma \to (\beta \to \gamma \odot \beta)$, woraus $\gamma \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma \odot \beta)]$ und weiter $(\alpha \to \beta) \to [\gamma \to (\alpha \to \gamma \odot \beta)]$ ableitbar ist. Es folgt $(\alpha \to \beta) \to [(\gamma \odot \alpha) \to (\gamma \odot \beta)]$. □

Es folgt ein Lemma, das erstens die grundlegenden Eigenschaften der $\to$-Verknüpfung enthält. Zweitens zeigt es, daß das Infimum zweier Aussagen die schwächste Aussage ist, die die Teilaussagen impliziert. Analog wird drittens bewiesen, daß das Supremum zweier Aussagen die stärkste Aussage ist, die von beiden Teilaussagen impliziert wird.

Lemma 3.9 *In* **BL** *gilt das folgende.*

(i) $\vdash 0 \to \alpha$ *und* $\vdash \alpha \to 1$

(ii) *Aus* $\vdash \alpha \to \beta$ *und* $\vdash \beta \to \gamma$ *folgt* $\vdash \alpha \to \gamma$.

(iii) $\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$ *und* $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$.

(iv) *Aus* $\vdash \gamma \to \alpha$ *und* $\vdash \gamma \to \beta$ *folgt* $\vdash \gamma \to \alpha \wedge \beta$.

(v) $\vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$ *und* $\vdash \beta \to \alpha \vee \beta$.

(vi) *Aus* $\vdash \alpha \to \gamma$ *und* $\vdash \beta \to \gamma$ *folgt* $\alpha \vee \beta \to \gamma$.

Beweis. (i) $0 \to \alpha$ gilt gemäß (F5).

Aus $0 \to (\alpha \to 0)$ folgt $(0 \odot \alpha) \to 0$, daher $(\alpha \odot 0) \to 0$ und $\alpha \to (0 \to 0)$, d.h. $\alpha \to 1$.

(ii) Dies folgt mithilfe von Lemma 3.8(i) aus (F1).

(iii) Nach (F2) gilt $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to \alpha$.

Aus $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to [\beta \odot (\beta \to \alpha)]$ und $[\beta \odot (\beta \to \alpha)] \to \beta$ folgt $[\alpha \odot (\alpha \to \beta)] \to \beta$.

(iv) Es sei $\gamma \to \alpha$ und $\gamma \to \beta$ beweisbar. Aus $[(\alpha \to \gamma) \odot (\gamma \to \beta)] \to (\alpha \to \beta)$ folgt dann $(\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)$ und weiter mittels Lemma 3.8(iii) $[\alpha \odot (\alpha \to \gamma] \to (\alpha \wedge \beta)$. Mittels (F4) wird $[\gamma \odot (\gamma \to \alpha)] \to (\alpha \wedge \beta)$ und weiter $\gamma \to (\alpha \wedge \beta)$.

(v) Wie leicht ersichtlich, ist $\alpha \to [(\alpha \to \beta) \to \beta]$ und $\alpha \to [(\beta \to \alpha) \to \alpha]$ beweisbar; es folgt gemäß (iv) $\alpha \to \alpha \vee \beta$. In ähnlicher Weise folgt $\beta \to \alpha \vee \beta$.

(vi) Es sei $\alpha \to \gamma$ und $\beta \to \gamma$ beweisbar. Aus (F5) und (F3) folgt $(\alpha \to \beta) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta]$ und damit $(\alpha \to \beta) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \gamma]$. Also gilt auch $(\alpha \to \beta) \to [((\alpha \to \beta) \to \beta) \wedge ((\beta \to \alpha) \to \alpha) \to \gamma]$, das heißt $(\alpha \to \beta) \to [(\alpha \vee \beta) \to \gamma]$. In analoger Weise folgt $(\beta \to \alpha) \to [(\alpha \vee \beta) \to \gamma]$ und insgesamt aufgrund von (F7) $(\alpha \vee \beta) \to \gamma$. □

Das folgende Lemma zeigt eine der „Schwächen“ der Logik **BL**. Wohl kann man von $\alpha \to \beta$ auf $\neg\beta \to \neg\alpha$ schließen, aber nicht umgekehrt. Denn aus letzterem folgt weiter $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$, und mit $\alpha \to \neg\neg\alpha$ ergibt sich $\alpha \to \neg\neg\beta$. Von $\neg\neg\beta$ kann jedoch nicht auf β geschlossen werden, wie man sich etwa am Beispiel der Produktlogik klarmachen kann.

Lemma 3.10 *In* **BL** *gilt: Aus* $\vdash \alpha \to \beta$ *folgt* $\vdash \neg\beta \to \neg\alpha$.

Beweis. Dies folgt aus $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to 0) \to (\alpha \to 0)$. □

Für **BL** gilt wie für **KL** Vollständigkeit: Die Beweisregeln sind die für die Semantik gerade passenden [Haj2, CEGT]. Dies ist jedoch ein wesentlich tiefgreifenderes Resultat als Satz 2.21 und ein Beweis erst aufgrund recht umfangreicher weiterer Ausarbeitungen möglich.

Eine Standardeigenschaft von Logiken ist die Deduktionseigenschaft; diese gilt für in einer abschwächten Form auch für **BL**. Für eine Aussage φ und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ stehe im weiteren

$$\varphi^n \text{ für } \underbrace{\varphi \odot \ldots \odot \varphi}_{n\text{-mal}}.$$

Satz 3.11 *Es sei Φ Theorie und φ und ψ Aussagen von* **BL**. *Es gilt $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, gdw für ein $k \geq 1$ gilt $\Phi \vdash \varphi^k \to \psi$.*

Beweis. Es gelte $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, und es sei $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ der dazugehörige Beweis. Für $i = 1, \ldots, n$ sei induktiv gezeigt $\Phi \vdash \varphi^{k_i} \to \gamma_i$ für ein $k_i \in \mathbb{N}$, womit die Behauptung folgt.

Ist γ_i ein Axiom von **BL** oder aus Φ oder gleich φ, ist dies klar. Es sei $j < i$ und γ_i das Ergebnis des auf γ_j und $\gamma_j \to \gamma_i$ angewendeten Modus ponens. Da nun Φ für gewisse k_j und $k_{j'}$ $\varphi^{k_j} \to \gamma_j$ und $\varphi^{k_{j'}} \to (\gamma_j \to \gamma_i)$ beweist, folgt für $k_i = k_j + k_{j'}$ $\Phi \vdash \varphi^{k_i} \to (\gamma_j \odot (\gamma_j \to \gamma_i))$ und damit wegen $\vdash (\gamma_j \odot (\gamma_j \to \gamma_i)) \to \gamma_i$ $\Phi \vdash \varphi^{k_i} \to \gamma_i$.

Umgekehrt sei für ein $k \geq 1$ $\Phi \vdash \varphi^k \to \psi$ angenommen. Sofern $k > 1$, folgt $\Phi \vdash \varphi \to (\varphi^{k-1} \to \psi)$ und damit $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \varphi^{k-1} \to \psi$. Hinreichende Wiederholung dieses Argumentes zeigt schließlich $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. □

Definition 3.12 Es sei Φ eine Theorie von **BL**.

Φ heiße *inkonsistent*, falls aus ihr 0 beweisbar ist, und andernfalls *konsistent*.

Φ heiße *vollständig*, falls Φ konsistent ist und für je zwei Aussagen φ und ψ entweder $\Phi \vdash \varphi \to \psi$ oder $\Phi \vdash \psi \to \varphi$ gilt.

Lemma 3.13 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt in* **BL**

$$(\alpha \to \beta)^k \vee (\beta \to \alpha)^k$$

Beweis. Indem man an die Stelle von γ die Aussage $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$ setzt, zeigt (F7) und Lemma 3.9(v), daß $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$ beweisbar ist. Also gilt die Behauptung für $k = 1$.

Die Behauptung folgt in ihrer Allgemeinheit, wenn gezeigt ist, daß mit $\vdash \varphi \vee \psi$ auch $\vdash (\varphi \odot \varphi) \vee \psi$ gilt.

Angenommen sei also $\vdash \varphi \vee \psi$; damit ist $(\varphi \to \psi) \to \psi$ und $(\psi \to \varphi) \to \varphi$ beweisbar. Zu zeigen ist $(\varphi \odot \varphi \to \psi) \to \psi$ und $(\psi \to \varphi \odot \varphi) \to \varphi \odot \varphi$.

Aus $(\varphi \to \psi) \to \psi$ folgt $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$ und weiter $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to \psi$; dies ist die erste Hälfte.

Aus $(\psi \to \varphi) \to \varphi$ folgt $(\psi \to \varphi) \odot (\psi \to \varphi) \to \varphi \odot \varphi$, und man erschließt $(\psi \to \varphi) \to [(\psi \to \varphi \odot \varphi) \to \varphi \odot \varphi]$. Weiter gilt $(\varphi \to \psi) \to \psi$ nach Voraussetzung und $\psi \to [(\psi \to \varphi \odot \varphi) \to \varphi \odot \varphi]$, womit $(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \varphi \odot \varphi) \to \varphi \odot \varphi]$ gilt. Die zweite Hälfte folgt mittels (F7). □

Satz 3.14 *Es sei Φ eine konsistente Theorie von* **BL**.

(i) *Φ kann zu einer vollständigen Theorie Φ' erweitert werden. Ist dabei α aus Φ nicht beweisbar, kann Φ' so gewählt werden, daß α aus Φ' auch nicht beweisbar ist.*

(ii) *Eine Aussage α ist aus Φ beweisbar, gdw α in jeder Erweiterung von Φ zu einer vollständigen Theorie enthalten ist.*

Beweis. (i) Es sei α eine Aussage mit $\Phi \nvdash \alpha$.

Es sei $(\varphi_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung sämtlicher Paare von Aussagen von **BL**. Es sei $\Phi_0 \overset{\text{def}}{=} \Phi$. Es gilt $\Phi_0 \cup \{\varphi_0 \to \psi_0\} \nvdash \alpha$ oder $\Phi_0 \cup \{\psi_0 \to \varphi_0\} \nvdash \alpha$; denn andernfalls bewiese Φ für ein natürliches k sowohl $(\varphi_0 \to \psi_0)^k \to \alpha$ als auch $(\psi_0 \to \varphi_0)^k \to \alpha$, also $[(\varphi_0 \to \psi_0)^k \vee (\psi_0 \to \varphi_0)^k] \to \alpha$ und infolge Lemma 3.13 auch α selbst. Trifft nun etwa die erste Möglichkeit zu, ist $\Phi_1 \overset{\text{def}}{=} \Phi_0 \cup \{\varphi_0 \to \psi_0\}$ eine α nicht beweisende und damit insbesondere weiterhin konsistente Theorie; andernfalls ist dies $\Phi_1 \overset{\text{def}}{=} \Phi_0 \cup \{\psi_0 \to \varphi_0\}$.

In ähnlicher Weise sei Φ_2 aus Φ_1, Φ_3 aus Φ_2 usw. konstruiert. Dann ist $\Phi' \overset{\text{def}}{=} \bigcup_i \Phi_i$ vollständig; gälte $\Phi' \vdash \alpha$, so bereits $\Phi_i \vdash \alpha$ für ein i, was nicht der Fall ist.

(ii) folgt direkt aus Teil (i). □

3.3 Die Lindenbaumalgebren: BL-Algebren

Die Lindenbaumalgebren von **BL** sind wie im Fall **KL** die Äquivalenzklassen von einer Theorie als äquivalent beweisbarer Aussagen, zusammen mit den elementweise ausgeführten logischen Operationen $\odot$ und $\rightarrow$. Sie figurieren schlicht unter dem Namen BL-Algebren.

Während man im Fall von **KL** zu booleschen Algebren und damit zu Systemen von Teilmengen geführt wird, gelangt man in **BL** nicht notwendig zu Systemen von Fuzzymengen. Letztere, zusammen mit einer t-Norm, sind zwar BL-Algebren – s. unten das Beispiel 3.21. BL-Algebren selbst sind aber allgemeinere Strukturen.

Definition 3.15 In **BL** stehe

$$\alpha \leftrightarrow \beta \text{ für } (\alpha \rightarrow \beta) \odot (\beta \rightarrow \alpha).$$

Ist Φ eine Theorie von **BL**, gelte $\alpha \leftrightarrow_\Phi \beta$ im Fall $\Phi \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Lemma 3.16 *Es sei Φ eine Theorie von* **BL***. Dann ist $\leftrightarrow_\Phi$ eine Äquivalenzrelation der Menge aller Aussagen, die mit den Operationen $\odot$ und $\rightarrow$ kompatibel ist. Folglich ist für Aussagen α und β*

$$\begin{aligned} [\alpha]_\Phi \odot [\beta]_\Phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \odot \beta]_\Phi, \\ [\alpha]_\Phi \rightarrow [\beta]_\Phi &\stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \rightarrow \beta]_\Phi, \end{aligned} \tag{7}$$

worin $[\cdot]_\Phi$ die jeweilige Äquivalenzklasse bezüglich $\leftrightarrow_\Phi$ bezeichnet, definierbar.

Beweis. Dies gilt aufgrund des Lemmas 3.8(iii) bzw. (F1). □

Definition 3.17 Es sei Φ eine Theorie von **BL**. Dann heiße

$$\mathcal{L}_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \{[\varphi]_\Phi \colon\ \varphi \text{ Aussage von } \mathbf{BL}\},$$

ausgestattet mit den Operationen $\odot$ und $\rightarrow$ gemäß (7) sowie der Konstanten $\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} [0]_\Phi$ die *Lindenbaumalgebra* von **BL** zur Theorie Φ.

Die Lindenbaumalgebren von **BL** algebraisch zu charakterisieren ist ein wenig aufwendiger als im Fall von **KL**; die abzählbaren BL-Algebren sind es, die sich als das algebraische Pendant zum Logikkalkül **BL** erweisen.

Lemma 3.18 *Es sei* $(\mathcal{L}_\Phi; \odot, \to, [0]_\Phi)$ *die Lindenbaumalgebra einer Theorie* Φ *von* **BL**. *Dann wird mittels*

$$[\alpha]_\Phi \leq [\beta]_\Phi \;\; \textit{falls} \;\; \Phi \vdash \alpha \to \beta \tag{8}$$

eine partielle Ordnung auf $\mathcal{L}_\Phi$ *erklärt. Die durch* $\wedge$ *induzierte Verknüpfung stellt dabei das Infimum dar, die durch* $\vee$ *induzierte das Supremum;* **0** *ist das kleinste,* **1** *das größte Element.*

Beweis. Daß $\leq$ eine partielle Ordnung mit **0** und **1** als kleinstem und größtem Element ist, folgt aus den Lemmata 3.8(i) und 3.9(i)-(ii). Daß $\wedge$ und $\vee$ die Verbandsoperationen sind, folgt aus Lemma 3.9(iii)-(vi). $\square$

Definition 3.19 Ein *residuierter Verband [residuated lattice]* ist eine Struktur $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(BL1) $(L; \leq)$ ist ein Verband mit kleinstem Element 0 und größtem 1.

(BL2) $(L; \odot, 1)$ ist ein kommutatives Monoid; d.h. $\odot$ ist eine assoziative und kommutative zweistellige Operation, und 1 ist ein Neutrales in bezug auf $\odot$.

(BL3) $\odot$ ist isoton; d.h. für $a, b \in L$ mit $a \leq b$ gilt $a \odot c \leq b \odot c$ für alle $c \in L$.

(BL4) Für $a, b \in L$ ist $a \to b$ das größte Element x mit der Eigenschaft $a \odot x \leq b$.

Ein residuierter Verband heiße *BL-Algebra*, falls außerdem gilt:

(BL5) $a \wedge b = a \odot (a \to b)$ für $a, b \in L$.

(BL6) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ für $a, b \in L$.

Schließlich sei für jedes Element a eines residuierten Verbandes

$$\neg a \stackrel{\text{def}}{=} a \to 0$$

gesetzt.

Diese Definition ist reichlich gewöhnungsbedürftig; einige informale Erklärungen mögen weiterhelfen. Die Elemente einer BL-Algebra sind als die Aussagen der unscharfen Logik **BL** zu sehen, so wie die Elemente einer booleschen Algebra als die Aussagen von **KL**. Die partielle Ordnung $\leq$ ordnet die Aussage hinsichtlich ihrer Aussagestärke; eine Aussage liegt unterhalb einer anderen, wenn sie stärker ist als diese. Die Operation $\odot$ entspricht einer Konjunktion, $\to$ einer Implikation. Die Axiome (BL1) bis (BL4) sind in diesem Sinne unproblematisch in ihrer Interpretation. Daß die durch sie bestimmte Algebra residuiert heißt, ist im übrigen dadurch begründet, daß $\wedge$ und $\to$ ein sogenanntes *adjungiertes Paar [adjoint pair]* bilden, d.h. die folgende Eigenschaft erfüllen:

Lemma 3.20 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *ein residuierter Verband. Dann gilt*

$$a \odot b \leq c, \quad gdw \quad a \leq b \to c \tag{9}$$

für alle $a, b, c \in L$.

Beweis. Aus $a \odot b \leq c$ folgt $b \to c = \max\{x\colon\ b \odot x \leq c\} \geq a$. Aus $a \leq b \to c$ folgt $a \odot b \leq b \odot (b \to c)$, und nach Definition von $b \to c$ ist $b \odot (b \to c) \leq c$. □

Der Hintergrund der Axiome (BL5) und (BL6) wird allenfalls mit untenstehendem Satz 3.24 einsichtiger, der eine alternative Definition der BL-Algebren als spezieller residuierter Verbände bietet.

Beispiel 3.21 Beispiel einer BL-Algebra ist zunächst einmal jede stetige t-Norm $\odot$ mit zugehörigem Residuum $\to$; $([0, 1]; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ mit $\leq$ als der natürlichen Ordnung ist eine BL-Algebra. Diese sei als *t-normbasierte Wahrheitswertealgebra* bezeichnet, und eine solche heiße

(1) die *łukasiewiczsche Wahrheitswertealgebra*, falls $\odot$ die łukasiewiczsche t-Norm und $\rightarrow$ das zugehörige Residuum gemäß (3) und (4) ist,

(2) die *Produkt-Wahrheitswertealgebra*, falls $\odot$ die Produkt-t-Norm und $\rightarrow$ das zugehörige Residuum gemäß (5) ist,

(3) die *gödelsche Wahrheitswertealgebra*, falls $\odot$ die gödelsche t-Norm und $\rightarrow$ das zugehörige Residuum gemäß (6) ist.

Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern auf Systeme von Fuzzymengen. Es sei $L \subseteq \{\varphi\colon\ X \rightarrow [0,1]\}$ ein Menge von Fuzzymengen über einer Menge X, die die konstanten Funktionen 0 und 1 enthält und unter den wie folgt erklärten Operationen $\odot$ und $\rightarrow$ abgeschlossen ist. $\varphi \odot \psi$ und $\varphi \rightarrow \psi$ seien zu gegebener t-Norm $\odot$ mit Residuum $\rightarrow$ einfach punktweise erklärt: Es sei $(\varphi \odot \psi)(x) = \varphi(x) \odot \psi(x)$ und $(\varphi \rightarrow \psi)(x) = \varphi(x) \rightarrow \psi(x),\ \ x \in X$. Dann ist $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ mit $\leq$ als der punktweisen partiellen Ordnung offensichtlich wiederum eine BL-Algebra.

Gemäß dem folgendem Lemma ist die partielle Ordnung einer BL-Algebra durch die übrige Struktur bereits eindeutig festgelegt.

Lemma 3.22 *In BL-Algebren lassen sich für je zwei Elemente a, b deren Infimum wie Supremum mittels $\odot$ und $\rightarrow$ ausdrücken:*

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \odot (a \rightarrow b), \\ a \vee b &= [(a \rightarrow b) \rightarrow b] \wedge [(b \rightarrow a) \rightarrow a]. \end{aligned}$$

Beweis. Die Formel fürs Infimum ist durch (BL5) vorgegeben. Die fürs Supremum ist in analoger Weise wie Lemma 3.9 zu beweisen. □

Definition 3.23 Es sei $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ ein residuierter Verband.

(i) $\odot$ heiße *mit den Verbandsoperationen kompatibel*, falls

$$a \odot (b \wedge c) = (a \odot b) \wedge (a \odot c), \tag{10}$$

$$a \odot (b \vee c) = (a \odot b) \vee (a \odot c) \tag{11}$$

für $a, b, c \in L$ gilt.

(ii) $\to$ heiße *mit den Verbandsoperationen kompatibel*, falls

$$\begin{aligned} a \to (b \wedge c) &= (a \to b) \wedge (a \to c), & (12)\\ a \to (b \vee c) &= (a \to b) \vee (a \to c), & (13)\\ (a \wedge b) \to c &= (a \to c) \vee (b \to c), & (14)\\ (a \vee b) \to c &= (a \to c) \wedge (b \to c) & (15) \end{aligned}$$

für $a, b, c \in L$ gilt.

(iii) L heiße *natürlich geordnet [divisible]*, falls für $a, b \in L$

$$a \leq b, \quad \text{gdw} \quad a = b \odot x \quad \text{für ein } x \in L,$$

gilt.

Satz 3.24 *Ein residuierter Verband* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *ist eine BL-Algebra genau dann, wenn* $\odot$ *und* $\to$ *mit den Verbandsoperationen kompatibel sind und* L *natürlich geordnet ist.*

Beweis (nur einer Richtung). Wir zeigen, daß die Eigenschaften (i), (ii), (iii) von Definition 3.23 in BL-Algebren erfüllt sind.

L sei also eine BL-Algebra. Aus (BL3) und der Kommutativität von $\odot$ folgt, daß $\odot$ in beiden Variablen monoton ist; aus (BL4) ist ersichtlich, daß $\to$ in der ersten Variable antiton und in der zweiten monoton ist.

Es sei $a, b, c \in L$. In Hinsicht auf Gleichung (11) ergibt sich, daß $a \odot b$, $a \odot c \leq a \odot (b \vee c)$. Ist weiter $a \odot b$, $a \odot c \leq x$, folgt aus der Residuationseigenschaft $b, c \leq a \to x$, also $b \vee c \leq a \to x$ und folglich $a \odot (b \vee c) \leq x$. Es folgt (11), und in ähnlicher Weise sind auch (12) und (15) herleitbar.

In Hinsicht auf Gleichung (13) ist des weiteren klar, daß $a \to b, a \to c \leq a \to (b \vee c)$. Es sei weiter $a \to b, a \to c \leq x$ für ein $x \in L$. Nach Definition ist $a \to (b \vee c) = \max \{y\colon\ a \odot y \leq b \vee c\}$; ist nun $a \odot y \leq b \vee c$, so $a \odot y \leq (b \to c) \to c$, also $y \odot (b \to c) \odot a \leq c$, was wiederum $y \odot (b \to c) \leq a \to c \leq x$ und weiter $b \to c \leq y \to x$ impliziert. Ähnlich folgt dann $c \to b \leq y \to x$ und wegen (BL6) $y \to x = 1$, das heißt $y \leq x$. Es folgt $a \to (b \vee c) \leq x$ und damit (13). In ähnlicher Weise sind (10) und (14) herleitbar.

Gilt schließlich für $a, b \in L$ $a \leq b$, so ist gemäß (BL5) $a = a \wedge b = b \odot (b \to a)$. Weiter gilt für jedes $x \in L$ wegen (BL3) $a \odot x \leq a \odot 1 = a$. Es folgt, daß L natürlich geordnet ist. □

Angemerkt sei ferner, daß der einer BL-Algebra unterliegende Verband in einem strengen Sinne distributiv ist.

Lemma 3.25 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *eine BL-Algebra. Dann gilt für* $a_\iota, b \in L$, $\iota \in I$

$$a \wedge \bigvee_\iota b_\iota = \bigvee_\iota (a \wedge b_\iota). \tag{16}$$

Ist L *linear geordnet, gilt außerdem*

$$a \vee \bigwedge_\iota b_\iota = \bigwedge_\iota (a \vee b_\iota). \tag{17}$$

Beweis. Bemerkt sei zunächst, daß sich Gleichung (11) auf den Fall unendlicher Konjunktionen verallgemeinern läßt: Es gilt $a \odot \bigvee_\iota b_\iota = \bigvee_\iota (a \odot b_\iota)$. Der Beweis ist direkt übertragbar.

Nun zu (16). Es gilt $a \wedge \bigvee_\iota b_\iota = \bigvee_\iota b_\iota \odot (\bigvee_\iota b_\iota \to a) = \bigvee_\kappa (b_\kappa \odot (\bigvee_\iota b_\iota \to a)) \leq \bigvee_\kappa (b_\kappa \odot (b_\kappa \to a)) = \bigvee_\kappa (a \wedge b_\kappa)$. Umgekehrt gilt für jedes κ, daß $a \wedge b_\kappa \leq a \wedge \bigvee_\iota b_\iota$, also auch $\bigvee_\iota (a \wedge b_\iota) \leq a \wedge \bigvee_\iota b_\iota$. Damit ist (16) gezeigt.

Weiter sei L linear geordnet. Klarerweise gilt für jedes $\kappa \in I$ $a \vee \bigwedge_\iota b_\iota \leq a \vee b_\kappa$. Es sei $x \in L$ mit $x \leq a \vee b_\kappa$ für alle κ. Dann ist entweder $x \leq a$ oder sonst $x \leq b_\kappa$ für jedes κ, also dann $x \leq \bigwedge_\iota b_\iota$; es folgt $x \leq a \vee \bigwedge_\iota b_\iota$. Also gilt (17). □

Hingewiesen sei schließlich auf eine weitere Alternativformulierung der Axiome von BL-Algebren. Es lassen sich nämlich die Axiome sämtlichst als Gleichungen formulieren. Dies hat weniger eine praktische als eine theoretische Bedeutung: BL-Algebren bilden demgemäß eine Varietät. Deren hier wichtige Eigenschaft ist, daß homomorphe Bilder von BL-Algebren wiederum BL-Algebren sind.

Satz 3.26 *Es gibt Gleichungen zwischen aus Variablen und den Konstanten* 0 *und* 1 *mittels* $\odot$ *und* $\to$ *gebildeten Termen mit der folgenden Eigenschaft: Eine Struktur* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *ist genau dann eine*

BL-Algebra, falls diese Gleichungen unter jeder Belegung gelten sowie $a \leq b$, gdw $a \to b = 1$, gesetzt wird.

Beweis. Es sei $a \wedge' b \stackrel{\text{def}}{=} a \odot (a \to b)$ sowie $a \vee' b \stackrel{\text{def}}{=} (a \to (a \to b)) \wedge (b \to (b \to a))$. Die erste Gruppe von Axiomen, zu verstehen als mittels $\odot$ und $\to$ formuliert, impliziert, daß $(L; \wedge', \vee')$ ein Verband mit 0 und 1 ist: $a \wedge' a = a$, $a \wedge' b = b \wedge' a$, $(a \wedge' b) \wedge' c = a \wedge' (b \wedge' c)$, $a \wedge' (b \vee' c)$; weiter $a \vee' a = a$, $a \vee' b = b \vee' a$, $(a \vee' b) \vee' c = a \vee' (b \vee' c)$, $a \vee' (b \wedge' c)$; sowie $0 \wedge' a = 0$, $a \vee' 1 = 1$. Es sei $\leq'$ die dazugehörige partielle Ordnung: Es gelte $a \leq' b$, falls $a = a \wedge' b$.

Die Bedingungen, daß $(L; \odot)$ ein Monoid mit Neutralem 1 ist, sind sämtlichst Gleichungen; diese seien die zweite Gruppe von Axiomen. Es folgt (BL2).

Weiter sei $a \to a = 1$ und $a \odot b \to c = a \to (b \to c)$ jeweils Axiom. Dann folgt aus $a \leq' b$ $\;a = a \wedge' b = a \odot (a \to b)$ und somit $a \to b = [a \odot (a \to b)] \to b = [(a \to b) \odot a] \to b = (a \to b) \to (a \to b) = 1$; und aus $a \to b = 1$ folgt $a \wedge' b = a \odot (a \to b) = a \odot 1 = a$, also $a \leq' b$. Damit ist gezeigt, daß $\leq$ mit $\leq'$ übereinstimmt. Insbesondere folgt, daß die Verbandsaxiome (BL1) implizieren, und es folgt (BL5).

Zudem gilt $a \odot b \leq c$, gdw $a \odot b \to c = 1$, gdw $a \to (b \to c) = 1$, gdw $a \leq b \to c$. Also ist mit dem Bisherigem die Residuumseigenschaft (9) beweisbar, und aus dieser folgen (BL3) und (BL4).

Schließlich sei die Gleichung (BL6) Axiom. Damit ist die Axiomatisierung von BL-Algebren allein auf der Basis von Gleichungen sowie der Bedingung $a \leq b$ im Fall $a \to b = 1$ komplett. □

Der folgende Satz ist nun endlich der eigentliche Anlaß für die Einführung von BL-Algebren.

Satz 3.27 *Es sei Φ eine Theorie von* **BL** *und $(\mathcal{L}_\Phi; \odot, \to, [0]_\Phi)$ die Lindenbaumalgebra von Φ, partiell geordnet gemäß* (8)*. Dann ist $(\mathcal{L}_\Phi; \leq, \odot, \to, [0]_\Phi, [1]_\Phi)$ eine BL-Algebra.*

Jede abzählbare BL-Algebra ist in dieser Weise einer Theorie von **BL** *zugeordnet.*

Beweis. (BL1) zusammen mit (BL5) und (BL6) ist Gegenstand von

Lemma 3.18. (BL2) gilt aufgrund Lemma 3.8(ii), (BL3) aufgrund Lemma 3.8(iii), (BL4) aufgrund (F5).

Der zweite Teil ist wie in Satz 2.12 zu zeigen. □

3.4 Struktur von BL-Algebren

Die BL-Algebren gehören zu denjenigen Algebren, deren Struktur sich bis ins Kleinste aufschlüsseln läßt. Diese Struktur zu beschreiben ist allerdings recht aufwendig und erfordert es, recht weit auszuholen. Es wird in diesem Abschnitt schrittweise vorgegangen, und zwar in einer Weise, daß die zahlreichen Einzelergebnisse auch woanders von Wert sind.

Auch dieser algebraische Teil ist unabhängig vom Rest lesbar. Weitere Quelle für Informationen ist weiterhin das Buch [Haj2] und der Artikel [CEGT].

Zunächst einmal wird gezeigt, daß sich BL-Algebren aus linear geordneten BL-Algebren durch Produktbildung zusammensetzen lassen. Alles weitere braucht damit nur noch der Analyse linear geordneter BL-Algebren zu dienen.

Für dieses letztere Unterfangen werden die BL-Algebren selbst erst einmal beiseite geschoben und zwei wichtige Unterklassen von BL-Algebren der Reihe nach in den Blickpunkt gerückt. Dies sind erstens die MV-Algebren, die bekanntesten Algebren im Zusammenhang mit mehrwertiger Logik; sie besitzen eine schöne Darstellungstheorie. Es folgt zweitens unter Verwendung ähnlicher Techniken die Aufschlüsselung der Struktur der Produktalgebren.

Aus beiden Algebrentypen lassen sich, wie schließlich gezeigt, linear geordnete BL-Algebren in gewissem Sinne vertikal zusammensetzen.

3.4.1 Subdirekte Darstellung von BL-Algebren

Wenn man Algebren bestimmten Typs analysieren möchte, stellt sich im allgemeinen als erstes die Frage, ob sich die zu untersuchende Algebra aus einfacheren solchen zusammensetzen läßt. Speziell im Fall partiell geordneter Algebren ist zu prüfen, ob nicht jede solche Algebra das Produkt linear geordneter ist oder wenigstens Unteralgebra eines solchen Produktes. Für BL-Algebren trifft dies letztere in der Tat zu, so daß alle weitere Analyse auf linear geordnete Strukturen reduzierbar ist.

Wenn nun eine BL-Algebra L das Produkt linear geordneter solche ist, sollten sich die letzteren nach dem folgenden Prinzip rekonstruieren lassen. Man bestimmt zunächst diejenigen Teilmengen von L zu finden, die in einer der Faktoralgebren stets den Wert 1 haben; diese Eigenschaft haben die Primfilter, die der Gegenstand der nachstehenden Definition sind. Bildet man dann den Quotienten von L bezüglich eines Primfilters, erhält man die korrespondierende linear geordnete BL-algebra.

Definition 3.28 Es sei $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ eine BL-Algebra.

(i) Eine Teilmenge F von L heiße *Filter*, falls (α) aus $a \in F$ und $a \leq b$ folgt, daß auch $b \in F$ ist, und (β) aus $a, b \in F$ folgt, daß auch $a \odot b \in F$ ist.

Ein Filter F von L heiße *Primfilter*, falls für je zwei $a, b \in L$ entweder $a \rightarrow b \in F$ oder $b \rightarrow a \in F$ ist.

(ii) Es sei F ein Filter von L. Dann sei für je zwei $a, b \in L$

$$a \sim_F b \quad \text{im Fall} \quad a \rightarrow b,\ b \rightarrow a \ \in \ F$$

gesetzt. Wir schreiben $[a]_F = \{b \in L \colon\ b \sim_F a\}$ und $[L]_F = \{[a]_F \colon a \in L\}$; letztere Menge heiße der *Quotient* von L bezüglich F.

Lemma 3.29 *Es sei $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ eine BL-Algebra, und es sei F ein Filter. Dann ist $\sim_F$ eine mit $\odot$ und $\rightarrow$ kompatible Äquivalenzrelation. Weiter ist der Quotient $[L]_F$ von L bezüglich F, zusammen mit der induzierten Relation $\leq$, den induzierten Operationen $\odot$ und $\rightarrow$ und den Konstanten $[0]_F$ und $[1]_F$, wiederum eine BL-Algebra.*

Ist dabei F ein Primfilter, ist diese BL-Algebra linear geordnet.

Beweis. Es gilt $a \sim_F a$, da 1 in jedem Filter enthalten ist, und es folgt konstruktionsbedingt aus $a \sim_F b$ auch $b \sim_F a$. Aus $a \sim_F b$ und $b \sim_F c$

folgt $a \sim_F c$, weil $a \to c \geq (a \to b) \odot (b \to c) \in F$, also $a \to c \in F$ und analog auch $c \to a \in F$ ist. Also ist $\sim_F$ eine Äquivalenzrelation.

Weiter impliziert $a' \to a$ aufgrund von (BL3) $a' \odot b \to a \odot b$. Es folgt, daß $\sim_F$ mit $\odot$ kompatibel ist. Ebenso ist aus Zusammenhängen wie $a' \to a \leq (a \to b) \to (a' \to b)$ zu ersehen, daß $\sim_F$ auch mit $\to$ kompatibel ist.

Damit gelten alle Gleichungen, in denen $\odot$, $\to$, die Konstanten 0 und 1 und beliebige Elemente aus L vorkommen, dann, wenn sie in L gelten, nach Abbildung unter $L \to [L]_F,\ a \mapsto [a]_F$ auch in $[L]_F$. Es folgt aus Satz 3.26, daß auch $[L]_F; \leq', \odot, \to, 0, 1)$ eine BL-Algebra ist, wobei $[a] \leq' [b]$ gesetzt sei, falls $[a] = [a] \wedge [b]$.

Weiter gilt definitionsgemäß $[a]_F \leq [b]_F$, falls $a' \leq b'$ für gewisse $a' \sim_F a$ und $b' \sim_F b$. In diesem Fall ist $a' = a' \wedge b'$, und es folgt $[a]_F \leq' [b]_F$. Gilt $[a]_F \leq' [b]_F$, so ist $[a]_F = [a \wedge b]_F$, und es folgt $a \sim_F a \wedge b \leq b$, also $[a]_F \leq [b]_F$. Insgesamt ist also $\leq' = \leq$.

Ist nun F ein Primfilter und $a, b \in L$, so gilt entweder $a \to b \in F$ und folglich $[a]_F \to [b]_F = 1$, d.h. $[a]_F \leq [b]_F$; oder es gilt $b \to a \in F$ und folglich $[b]_F \leq [a]_F$. $\square$

Es ist hieraus bereits klar, daß eine BL-Algebra L im Produkt der Quotientenalgebren $[L]_F$, F Primfilter, mittels der Abbildungen $a \mapsto [a]_F$ darstellbar ist. Es wird nun gezeigt, daß diese Darstellung injektiv ist.

Lemma 3.30 *Es sei $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ eine BL-Algebra. Für jedes Element $a < 1$ von L gibt es einen a nicht enthaltenden Primfilter von L.*

Beweis. Es sei a ein von 1 verschiedenes Element von L. Dann ist die Menge $\{1\}$ ein a nicht enthaltender Filter. Unter all den Mengen mit dieser Eigenschaft gibt es laut Zornschem Lemma eine maximale, etwa F.

Angenommen sei, daß F kein Primfilter sei, daß also für gewisse $b, c \in L$ weder $b \to c$ noch $c \to b$ in F sei. Es sei $F_{b \to c} = \{x : \ x \geq (b \to c)^n \odot y \text{ für } y \in F,\ n \in \mathbb{N}\}$ der von $b \to c$ und F erzeugte Filter und ähnlich auch $F_{c \to b}$ definiert. Nach Voraussetzung enthalten sowohl $F_{b \to c}$ als auch $F_{c \to b}$ a, womit $a \geq (b \to c)^{n_1} \odot y_1$ und $a \geq (c \to b)^{n_2} \odot y_2$

für gewisse $y_1, y_2 \in F$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt. Mit $y = y_1 \odot y_2 \in F$ und $n = \max\{n_1, n_2\}$ folgt $a \geq [(b \to c)^n \odot y] \vee [(c \to b)^n \odot y] = [(b \to c)^n \vee (c \to b)^n] \odot y$. Weiter gilt $(b \to c)^n \vee (c \to b)^n = 1$; dies zu zeigen, kann in gleicher Weise wie im Beweis von Lemma 3.13 vorgegangen werden. Es folgt $a \geq y$ und damit $a \in F$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist F ein Primfilter. $\square$

Definition 3.31 Es seien $(L_\iota; \leq_\iota, \odot_\iota, \to_\iota, 0_\iota, 1_\iota)$, $\iota \in I$, BL-Algebren. Es sei

$$L = \prod_{\iota \in I} L_\iota$$

das kartesische Produkt der Grundmengen der einzelnen Algebren, versehen mit der folgenden Struktur. L sei gemäß

$$(a_\iota)_\iota \leq (b_\iota)_\iota \text{ im Fall } a_\iota \leq b_\iota \text{ für alle } \iota$$

partiell geordnet; es seien $\odot$ und $\to$ auf L gemäß

$$\begin{aligned} (a_\iota)_\iota \odot (b_\iota)_\iota &\overset{\text{def}}{=} (a_\iota \odot b_\iota)_\iota, \\ (a_\iota)_\iota \to (b_\iota)_\iota &\overset{\text{def}}{=} (a_\iota \to b_\iota)_\iota \end{aligned}$$

erklärt sowie $0 \overset{\text{def}}{=} (0_\iota)_\iota$ und $1 \overset{\text{def}}{=} (1_\iota)_\iota$ gesetzt. Dann heiße $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ das *direkte Produkt* der Algebren L_ι, $\iota \in I$.

Weiter sei L' eine BL-Subalgebra von $\prod_{\iota \in I} L_\iota$; dabei seien die Abbildungen $\pi_\lambda\colon\ L' \to L_\iota,\ (a_\iota)_\iota \mapsto a_\lambda$ für alle λ surjektiv. Dann heiße L' *subdirektes Produkt* der BL-Algebren L_ι, $\iota \in I$.

Satz 3.32 *Jede BL-Algebra* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *ist subdirektes Produkt linear geordneter BL-Algebren.*

Beweis. Es seien F_ι, $\iota \in I$, sämtliche Primfilter von L, und es sei für jedes $\iota \in I$ $L_\iota = [L]_{F_\iota}$, d.h. die Quotientenalgebra von L bezüglich des Filters F_ι. Es sei

$$\rho\colon\ L \to \prod_\iota L_\iota, \quad a \mapsto ([a]_{F_\iota})_\iota.$$

Dann ist ρ offensichtlich ein Homomorphismus. Ist weiter $a \neq b$, so ist entweder $a \to b$ oder $b \to a$ von 1 verschieden; trifft etwa ersteres zu, ist gibt es gemäß Lemma 3.30 einen Primfilter F mit $[a \to b]_F < [1]_F$, womit $[a]_F$ von $[b]_F$ verschieden ist; im Fall $b \to a < 1$ kann ähnlich argumentiert werden. Es folgt, daß ρ injektiv ist.

Also ist L Subalgebra des direkten Produktes der L_ι, und daß es sich um ein subdirektes Produkt handelt, folgt konstruktionsgemäß. □

3.4.2 Darstellung von MV-Algebren

Wir wenden uns jetzt der bekanntesten Teilklassen der BL-Algebren zu, den MV-Algebren. Es handelt sich bei diesen um die Lindenbaumalgebren der łukasiewiczschen Logik, einer Logik, die bereits in den 30er Jahren des vergangenen Jahrhunderts entworfen worden ist. Diese heute wohl am weitesten verbreitete Logik selbst wird aus praktischen Gründen erst im Abschnitt 4 vorgestellt.

Definition 3.33 Eine BL-Algebra $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ heiße *MV-Algebra*, falls

(MV) $\neg\neg a = a$ für alle $a \in L$

gilt.

Ist L also eine MV-Algebra, ist $\neg$ eine Komplementfunktion auf der partiell geordneten Menge $(L; \leq)$: $\neg$ ist involutiv, und es gilt $a \leq b$, gdw $\neg b \leq \neg a$, für alle $a, b \in L$.

Das prototypische Beispiel ist in Beispiel 3.21 enthalten: Ein System von Fuzzymengen zusammen mit der punktweise ausgeführten łukasiewiczschen t-Norm und zugehörigem Residuum ist eine MV-Algebra.

Lemma 3.34 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *eine MV-Algebra. Es gilt für* $a, b \in L$

$$a \to b = \neg(a \odot \neg b), \tag{18}$$
$$a \odot b = \neg(a \to \neg b), \tag{19}$$
$$a \vee b = (a \to b) \to b. \tag{20}$$

Beweis. Für $a, b \in L$ gilt wegen (MV) $a \to b = a \to (\neg b \to 0) = (a \odot \neg b) \to 0 = \neg(a \odot \neg b)$. Das beweist (18), woraus sich unmittelbar auch (19) ergibt.

Weiter ist $\neg b \to \neg a = \neg b \to (a \to 0) = a \to (\neg b \to 0) = a \to \neg\neg b = a \to b$. Da $\neg$ ordnungsumkehrend und bijektiv ist, folgt $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b) = \neg[\neg b \odot (\neg b \to \neg a)] = [(\neg b \to \neg a) \odot \neg b] \to 0 = (\neg b \to \neg a) \to b = (a \to b) \to b$. □

Das folgende Beispiel ist allgemeinerer Natur als 3.21 – und ist, wie sich zeigen wird, bereits das allgemeinste.

Definition 3.35 Eine Struktur $(G; +, \leq)$ heiße eine *partiell geordnete Gruppe*, kurz *po-Gruppe*, falls

(poG1) $(G; +)$ eine Gruppe ist;

(poG2) $(G; \leq)$ eine partiell geordnete Menge ist;

(poG3) für alle $a, b, c \in G$ mit $a \leq b$ $a + c \leq b + c$ sowie $c + a \leq c + b$ gilt.

Den Prototyp einer partiell geordneten Gruppe bieten die reellen Zahlen; $(\mathbb{R}; +, \leq)$, worin $+$ die gewöhnliche Addition und $\leq$ die natürliche Ordnung bedeutet, ist offensichtlich eine po-Gruppe, und zwar sogar eine linear geordnete.

Beispiel 3.36 Es sei $(G; +, \leq)$ eine abelsche po-Gruppe und u ein Element von G mit $u > 0$. Es sei

$$G[0, u] \overset{\text{def}}{=} \{g \in G\colon\ 0 \leq g \leq u\}$$

das von 0 bis u reichende Intervall von G. Weiter sei $G[0, u]$ mittels $\leq$ partiell geordnet und seien wie folgt die Operationen $\odot$, $\to$ auf $G[0, u]$ erklärt:

$$\begin{aligned} \odot\colon\ & G[0,u] \times G[0,u] \to G[0,u], \quad (a,b) \mapsto (a+b-1) \vee 0, \\ \to\colon\ & G[0,u] \times G[0,u] \to G[0,u], \quad (a,b) \mapsto (1-a+b) \wedge 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Dann ist $(G[0, u]; \leq, \odot, \to, 0, u)$ eine MV-Algebra. Dies ergibt sich durch direkte Überprüfung der Axiome (BL1) bis (BL6) sowie (MV).

Man beachte, daß, wenn man vom Standardbeispiel einer po-Gruppe, $(\mathbb{R}; +, \leq)$ nämlich, ausgeht, man die łukasiewiczsche Wahrheitswertealgebra aus Beispiel 3.21 erhält.

Hauptergebnis dieses Unterabschnittes wird der Satz 3.41 sein, demzufolge sich jede MV-Algebra auf diese Weise aus einer po-Gruppe konstruieren läßt. Um dies zu zeigen, wird in einem ersten Schritt für eine gegebene MV-Algebra eine Addition definiert, die anschließend als Gruppenaddition verwendet wird; diese kann naturgemäß noch nicht für alle Paare von Elementen definiert sein.

Definition 3.37 Es sei $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ eine MV-Algebra. Es sei $+$ eine auf L wie folgt erklärte partielle binäre Operation:

$$\begin{array}{l} a + b \text{ existiere, falls } a \leq \neg b; \\ \text{in diesem Fall sei } a + b \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg a \odot \neg b). \end{array}$$

Dann heiße $(L; \leq, +, 0, 1)$ die zu L gehörige *Effektalgebra*.

Der Terminus Effektalgebra kommt aus einer ganz anderen Ecke und stiftet hier hoffentlich keine Verwirrung.

Durch den Übergang von den MV-Algebra-Operationen zur partiellen Addition geht keine Information verloren; die alte Struktur ist wie folgt rückgewinnbar.

Lemma 3.38 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine MV-Algebra und* $(L; \leq, +, 0, 1)$ *die zugehörige Effektalgebra. Dann ist für jedes* $a \in L$ $\neg a$ *genau dasjenige Element, für welches* $a + \neg a$ *definiert und* $= 1$ *ist. Weiter gilt für* $a, b \in L$

$$a \odot b = \neg(\neg a + (\neg b \wedge a)), \tag{22}$$

$$a \rightarrow b = \neg a + (a \wedge b). \tag{23}$$

Beweis. Für ein $a \in L$ ist $a + \neg a$ offensichtlich definiert, und $a + \neg a = \neg(a \odot \neg a) = \neg(a \odot (a \rightarrow 0)) = \neg(a \wedge 0) = \neg 0 = 1$. Ist umgekehrt $a + b = 1$, so gilt $b \leq \neg a$ und $\neg a \odot \neg b = 0$, aus welch letzterem wegen (9) $\neg a \leq \neg b \rightarrow 0 = b$ folgt; zusammengenommen ergibt sich $b = \neg a$.

Weiter folgt wegen (MV) für $a, b \in L$ mit $\neg a \leq b$, daß $a \odot b = \neg(\neg a + \neg b)$. Für beliebiges $a, b \in L$ gilt wegen Satz 3.24 $a \odot b = a \odot (b \vee \neg a)$, und es folgt $a \odot b = \neg(\neg a + \neg(b \vee \neg a)) = \neg(\neg a + (\neg b \wedge a))$. Dies ist die Gleichung (22); die zweite, (23), folgt mithilfe von (18). □

Lemma 3.39 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine MV-Algebra und* $(L; \leq, +, 0, 1)$ *die zugehörige Effektalgebra. Dann gilt für alle* $a, b, c \in L$*:*

(i) *Existiert* $(a+b)+c$*, so auch* $a+(b+c)$ *und sind beide Ausdrücke gleich.*

(ii) *Existiert* $a+b$*, so auch* $b+a$ *und sind beide Ausdrücke gleich.*

(iii) *Aus* $a+b = a+c$ *folgt* $b = c$*.*

(iv) *Es gilt* $a \leq b$*, gdw* $b = a+d$ *für ein* $d \in L$*.*

Beweis. (i) Es sei $(a+b)+c$ definiert. Dann gilt $b \leq \neg a$ und $a+b = \neg(\neg a \odot \neg b) = \neg a \rightarrow b \leq \neg c$, und es folgt $\neg c \rightarrow b \leq (\neg a \rightarrow b) \rightarrow b) = \neg a \vee b = \neg a$. Wegen $b \leq a+b \leq \neg c$ existiert $b+c$, und wegen $b+c = \neg(\neg b \odot \neg c) = \neg c \rightarrow b \leq \neg a$ existiert auch $a+(b+c)$. Die Summe von a, b, c gleicht für beide Klammerungsarten $\neg(\neg a \odot \neg b \odot \neg c)$.

(ii) Dies ist leicht nachzurechnen.

(iii) Es seien $a, b, c \in L$ gegeben mit $a+b = a+c$; dies heißt $\neg(\neg a \odot \neg b) = \neg(\neg a \odot \neg c)$ sowie $\neg a \leq b, c$. Es folgt $\neg b \rightarrow a = \neg c \rightarrow a$ und weiter $\neg b = a \vee \neg b = (\neg b \rightarrow a) \rightarrow a = (\neg c \rightarrow a) \rightarrow a = a \vee \neg c = \neg c$, also $b = c$.

(iv) Aus $a \leq b$ folgt $\neg b \leq \neg a$, also $\neg b = \neg a \odot e = \neg a \odot (e \vee a)$ für ein $e \in L$. Es wird $d = \neg e \wedge \neg a \leq \neg a$ und $b = a + d$. □

Lemma 3.40 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine linear geordnete MV-Algebra und* $(L; \leq, +, 0, 1)$ *die zugehörige Effektalgebra. Dann gibt es eine linear geordnete Gruppe* $(G; +, \leq)$ *mit positivem Element* u*, so daß* $(L; \leq, +, 0, 1)$ *und* $(G[0, u]; +, 0, u)$ *isomorph sind, wobei* $+$ *genau für alle summierbaren Gruppenelemente definiert ist.*

Des weiteren ist $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *zu der gemäß Beispiel 3.36 definierten MV-Algebra* $(G[0, u]; \leq, \odot, \rightarrow, 0, u)$ *isomorph.*

Beweis. Für Elemente $a, b \in L$ mit $a \leq b$ sei im folgenden $b - a$ dasjenige gemäß Lemma 3.39(iv) existierende und eindeutige Element, für welches $a + (b - a) = b$.

Es sei $G = \mathbb{Z} \times (E \setminus \{1\})$; auf G sei eine Addition gemäß

$$+ : \; G \times G \to G, \quad ((m, a), (n, b)) \mapsto \begin{cases} (m + n, \; a + b) & \text{für } a < \neg b, \\ (m + n + 1, \; a - \neg b) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Assoziativität weist man durch Fallunterscheidungen direkt nach; die Details seien hier weggelassen. Neutrales Element ist $(0, 0)$, und zu einem Element $(n, a) \in L$ ist $(-n - 1, \neg a)$ das Inverse.

G sei weiter gemäß

$$(m, a) \leq (n, b) \text{ im Fall } m < n \text{ oder } m = n \text{ und } a \leq b$$

partiell geordnet. Da offensichtlich (poG3) erfüllt ist, wird G so zur po-Gruppe.

Schließlich ist $G[(0, 0), (1, 0)] = \{(0, a) \colon \; a \in L\} \cup \{(0, 1)\}$. Es ist offensichtlich, daß $G[(0, 0), (1, 0)]$, ausgestattet mit der Addition $+$, wo immer sie ausführbar ist, zu L isomorph ist.

Für $a, b \in L$ gilt weiter gemäß (22) $a \odot b = \neg(\neg a + (\neg b \wedge a))$; da L linear geordnet ist, heißt dies $a \odot b = \neg(\neg a + \neg b)$ im Fall $a > \neg b$, $a \odot b = 1$ sonst. Dieselben Gleichungen gelten auch in G: Mit Bezug auf $G[(0, 0), (1, 0)]$ gilt $(0, a) \odot (0, b) = (0, a) + (0, b) - (1, 0) = (1, 0) - ([(1, 0) - (0, a)] + [(1, 0) - (0, b)])$ im Fall $1 > a > \neg b$, andernfalls ergibt die Verknüpfung mit $\odot$ $(1, 0)$. In $G[(0, 0), (1, 0)]$ bestimmt sich also $\odot$ gemäß (21); und Ähnliches gilt auch für $\to$.

Also ist die MV-Algebra L der wie im Beispiel 3.36 aus der po-Gruppe G hervorgehenden isomorph. □

Satz 3.41 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *eine MV-Algebra. Dann gibt es eine po-Gruppe* $(G; +, \leq)$*, so daß* $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ *und* $(G[0, u]; \leq, \odot, \to, 0, u)$*, konstruiert gemäß Beispiel 3.36, isomorph sind.*

Beweis. L ist gemäß Satz 3.32 subdirekte Darstellung von BL-Algebren. Da in allen linear geordneten Quotientenalgebren wie in L die Gleichung (MV) gilt, handelt es sich um linear geordnete MV-Algebren.

Gemäß Lemma 3.40 läßt sich L weiter in das Einheitsintervall einer po-Gruppe $(G'; +, \leq)$ isomorph einbetten. Die von L, als Teilmenge von G', erzeugte Untergruppe G von G' hat schließlich die gewünschten Eigenschaften. □

3.4.3 Darstellung von Produktalgebren

Eine zweite Unterklasse von BL-Algebren sind die Produktalgebren. Diese sind weniger gut bekannt, sind aber die Lindenbaumalgebren einer Logik, die auf einer selten suggestiven t-Norm beruht: der Produkt-t-Norm aus Beispiel 3.4.

Definition 3.42 Eine BL-Algebra $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ heiße *Produktalgebra*, falls

(P1) $a \wedge \neg a = 0$ für alle $a \in L$;

(P2) für alle $a, b, c \in L$ $\neg\neg a = 1$ und $a \odot b = a \odot c$ $b = c$ impliziert.

Das prototypische Beispiel ist wiederum Beispiel 3.21 zu entnehmen: Ein System von Fuzzymengen zusammen mit der punktweise ausgeführten Produkt-t-Norm und zugehörigem Residuum ist eine Produktalgebra.

Das nächste Beispiel ist wieder von so großer Allgemeinheit, daß es gleich alle Fälle abdeckt.

Beispiel 3.43 Es sei $(G; +, \leq)$ eine po-Gruppe. Es sei

$$L(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G\colon\ g \leq 0\} \,\dot{\cup}\, \{0'\}$$

die Menge aller negativen Elemente von G, erweitert um ein neues Element $0'$. L sei partiell geordnet in einer Weise, daß L dieselbe partielle Ordnung aufweist wie in G sowie $0'$ als kleinstes Element hat; es gelte also für je zwei von $0'$ verschiedene Elemente $a, b, \in L(G)$ $a \leq b$, gdw dies in bezug auf G der Fall ist, sowie $0' \leq a$ für alle $a \in L(G)$.

Außerdem sei $1' \stackrel{\text{def}}{=} 0$ und

$$\begin{aligned} \odot\colon\ & L(G) \times L(G) \to L(G), \quad (a,b) \mapsto a+b, \\ \to\colon\ & L(G) \times L(G) \to L(G), \quad (a,b) \mapsto \begin{cases} b-a & \text{für } a \geq b, \\ 1' & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{24}$$

Dann ist $(L(G); \leq, \odot, \to, 0', 1')$ eine Produktalgebra. Dies ergibt sich durch direkte Überprüfung der Axiome (BL1) bis (BL6) sowie (P1) und (P2).

Man wird also wie bei den MV-Algebren zu partiell geordneten Gruppen geführt. Daß alle Produktalgebren diese Form haben, ist glücklicherweise weit weniger aufwendig zu beweisen als im Fall der MV-Algebren.

Lemma 3.44 *Es sei $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ eine linear geordnete Produktalgebra. Dann gibt es eine linear geordnete po-Gruppe $(G; +, \leq)$, so daß $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ und $(L(G); \leq, \odot, \to, 0', 1')$, konstruiert gemäß Beispiel 3.43, isomorph sind.*

Beweis. Es sei $L' = L \setminus \{0, 1\}$ die Menge aller von 0 und 1 verschiedenen Elemente der Produktalgebra; es sei

$$G = \{(-1, a)\colon\ a \in L'\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(1, a)\colon\ a \in L'\},$$

versehen mit der wie folgt erklärten Operation $+$:

$$\begin{aligned} (-1,a) + (-1,b) &= (-1, a \odot b), \\ (-1,a) + (1,b) &= \begin{cases} (-1, b \to a) & \text{für } a < b, \\ (0,0) & \text{für } a = b, \\ (1, a \to b) & \text{für } a > b \end{cases} \\ (1,a) + (1,b) &= (1, a \odot b) \end{aligned}$$

für $a, b \in L'$; und $(0,0)$ sei bezüglich $+$ neutrales Element. Damit ist $(G; +)$ eine Gruppe.

Weiter sei G partiell geordnet gemäß $(-1,a) \leq (0,0) \leq (1,b)$ für alle $a, b \in L'$ und $(-1,a) \leq (-1,b)$, gdw $(1,b) \leq (1,a)$, gdw $a \leq b$ in bezug auf L. Damit wird $(G; +, \leq)$ zur po-Gruppe.

Offenbar läßt sich L aus G wie im Beispiel 3.43 rekonstruieren. $\square$

Satz 3.45 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine Produktalgebra. Dann gibt es eine po-Gruppe* $(G; +, \leq)$*, so daß* $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *und* $(L(G); \leq, \odot, \rightarrow, 0', 1')$*, konstruiert gemäß Beispiel 3.43, isomorph sind.*

Beweis. L ist gemäß Satz 3.32 subdirekte Darstellung von BL-Algebren. Weiter ist die Bedingung (P1) von der Form einer Gleichung und läßt sich (P2) formulieren gemäß

$$\neg\neg a \leq [((a \odot b) \rightarrow (a \odot c)) \rightarrow (b \rightarrow c)],$$

was ebenfalls als Gleichung geschrieben werden kann. Da in den linear geordneten Quotientenalgebren alle Gleichungen gelten, die in L gelten, handelt es sich um linear geordnete Produktalgebren. Die Behauptung folgt damit auf Grundlage von Lemma 3.44. □

3.4.4 Struktur linear geordneter BL-Algebren

Am aufwendigsten ist nun die nähere Analyse der Struktur linear geordneter BL-Algebren.

Satz 3.46 *Es sei* $(L; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine linear geordnete BL-Algebra. Dann gibt es paarweise disjunkte, konvexe Teilmengen* S_κ*,* $\kappa \in K$*, von* L*, so daß für jedes* κ *gilt:*

(i) *Enthält* S_κ *kein kleinstes Element, ist* $(T_\kappa; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *eine Produktalgebra, worin* $T_\kappa = S_\kappa \cup \{0, 1\}$ *ist.*

(ii) *Enthält* T_κ *das kleinste Element* 0_κ*, ist* $(T_\kappa; \leq, \odot, \rightarrow, 0_\kappa, 1)$ *eine MV-Algebra, worin* $T_\kappa = S_\kappa \cup \{1\}$ *ist.*

Weiter gilt für alle Elementepaare $a, b \in L$ *mit* $a \leq b$*, für die es kein* κ *gibt mit* $a, b \in S_\kappa$*:* $a \odot b = a$*,* $b \rightarrow a = a$*,* $a \rightarrow b = 1$*.*

Beweis. Für je zwei Elemente $a, b \in L$ mit $a \leq b$ gelte $z(a, b)$, falls $a \odot b < a$ gilt. Gezeigt werde zunächst: Aus $a \leq b \leq c$ und $z(a, b)$, $z(b, c)$ folgt $z(a, c)$, und aus $a \leq b \leq c \leq d$ und $z(a, d)$ folgt $z(b, c)$.

Es sei also $a \leq b \leq c$ und $z(a,b)$, $z(b,c)$ angenommen und außerdem $a \odot c = a$. Mit $e = a \to (a \odot b)$ wird $b \leq e < c$; weiter ist $c \to e = (a \odot c) \to (a \odot b) = e$ und folglich $b = e \wedge b = e \odot (e \to b) = (c \wedge e) \odot (e \to b) = c \odot (c \to e) \odot (e \to b) = c \odot e \odot (e \to b) = c \odot (b \wedge e) = c \odot b < b$. Also muß $a \odot c < a$, d.h. $z(a,c)$ gelten.

Weiter sei $a \leq b \leq c \leq d$. Dann folgt aus $b \odot c = b$, daß $a \odot c = b \odot (b \to a) \odot c = b \odot (b \to a) = a$. Weiter ist $a \geq a \odot d = \min \{y\colon\ d \leq a \to y\} \geq \min \{y\colon\ c \leq a \to y\} = a \odot c = a$, d.h. $a \odot d = a$. Es folgt der zweite Teil.

Es seien S_κ, $\kappa \in K$, die maximalen Teilmengen von L mit der Eigenschaft, daß $z(a,b)$ für je zwei Elemente $a, b \in I$ mit $a \leq b$ gilt. Je zwei solche Teilstücke überschneiden sich dann nicht; und jedes solche Teilstück ist konvex, d.h. mit zwei Elementen a und b enthält es auch alle zwischen a und b liegenden Elemente.

Es seien nun a und b zwei Elemente der BL-Algebra L, die nicht in einem gemeinsamen der so bestimmten Teilstücke liegen, und es sei $a \leq b$. Dann gilt konstruktionsgemäß $a \odot b = a$. Es liege zudem b entweder in keinem solchen Teilstück; oder aber b liege in einem Teilstück S_κ, und zwischen a und S_κ sei noch mindestens ein weiteres Element vorhanden; dann folgt offensichtlich $b \to a = a$.

Es sei nun ein Teilstück S_κ für ein $\kappa \in K$ fest gegeben. Für $a, b \in S_\kappa$ mit $a < b$ gilt dann $b \to a \in S_\kappa$; denn $b \to a = \max \{x\colon\ b \odot x \leq a\} \notin S_\kappa$ hieße $b = b \odot x \leq a$ für ein x oberhalb von S_κ.

Folge dieses Umstandes ist, daß in S_κ die Kürzungseigenschaft gilt: Ist $a, b, c \in S_\kappa$ sowie $a \odot b = a \odot c \in S_\kappa$, gilt $b = c$. Denn unter der Annahme $b \leq c$ wird $a \odot b = a \odot (b \wedge c) = a \odot c \odot (c \to b) = a \odot b \odot (c \to b)$, womit $c \to b$ nicht in S_κ liegen kann, d.h. $b = c$ gelten muß.

Weiter liegt für $a, b \in S_\kappa$ $a \odot b$ entweder in S_κ oder ist untere Schranke von S_κ; im letzteren Fall sei $0_\kappa = a \odot b$ gesetzt. Unter den nicht in S_κ liegenden Elementen unterhalb S_κ ist 0_κ das größte, womit folgt, daß 0_κ das einzige Element außerhalb S_κ ist, auf das die auf Elemente von S_κ angewendete Operation $\odot$ führen kann. Denn gegenteiligenfalls wäre ja $a \to 0_\kappa = 0_\kappa$ im Widerspruch zu $a \odot b = 0_\kappa$, das heißt $a \to 0_\kappa \geq b$. Im übrigen ist, da $0_\kappa \notin S_\kappa$, $d \odot 0_\kappa = 0_\kappa$ für alle $d \in S_\kappa$ und damit auch $0_\kappa \odot 0_\kappa = 0_\kappa \odot a \odot b = 0_\kappa \odot b = 0_\kappa$.

Es sei T_κ wie folgt aus S_κ konstruiert: Ist S_κ unter $\odot$ abgeschlossen, sei $T_\kappa = S_\kappa \cup \{0, 1\}$, andernfalls sei $T_\kappa = S_\kappa \cup \{0_\kappa, 1\}$. Dann ist T_κ offenbar unter den BL-Operationen abgeschlossen und damit $(T_\kappa; \leq, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ bzw. $(T_\kappa; \leq, \odot, \rightarrow, 0_\kappa, 1)$ eine BL-Algebra. Es gilt im weiteren zu zeigen, daß es sich um Produkt- bzw. um eine MV-Algebra handelt.

Es sei zunächst der Fall betrachtet, daß S_κ unter $\odot$ abgeschlossen ist.

Ist dann $a \in T_\kappa$, ist entweder $a = 0$ oder sonst $a \rightarrow 0 = \max\{x : x \odot a = 0\} = 0$, da ja $x \odot a > 0$ für jedes $x > 0$ gilt. Also gilt $a \wedge (a \rightarrow 0) = 0$. Dies beweist die in Definition 3.42 erstgenannte Eigenschaft von Produktalgebren.

Ist weiter $a, b, c \in T_\kappa$ und $a > 0$, folgt aus $a \odot b = a \odot c \quad b = c$. Denn ist $b = 0$, so $a \odot c = 0$, also $c = 0$; ist $b = 1$, folgt $a \odot c = a$, was $c = 1$ bedeutet; und gilt $0 < b < 1$, d.h. $b \in S_\kappa$, so auch $c \in S_\kappa$ und folglich $a \odot b = a \odot c \in S_\kappa$, woraus mittels der Kürzungseigenschaft $b = c$ folgt. Damit ist klar, daß T_κ eine Produktalgebra ist.

Es sei nun angenommen, daß das Nullement 0_κ von T_κ das Produkt zweier echt positiver, d.h. aus S_κ stammender, Elemente ist: $0_\kappa = e \odot f$. Es sei des weiteren $\neg$ die Negation in T_κ, d.h. es stehe für den Rest dieses Beweises $\neg a$ ausnahmsweise für $a \rightarrow 0_\kappa$. Behauptet wird, daß dann für jedes $a \in T_\kappa \quad \neg\neg a = a$ gilt und damit gemäß Definition 3.33 T_κ eine MV-Algebra ist.

Im Fall $a = 0_\kappa$ oder $a = 1$ ist offenbar $\neg\neg a = a$; im weiteren sei $0_\kappa < a < 1$, d.h. $a \in S_\kappa$ angenommen. Es gilt dann $\neg a > 0_\kappa$; denn aus $\neg a = 0_\kappa$ würde $a \rightarrow \neg\neg e = \neg e \rightarrow \neg a = \neg\neg e$ folgen und damit $a \odot \neg\neg e = \neg\neg e$, was im Widerspruch zu $a > 0_\kappa$ und $\neg\neg e \geq e > 0_\kappa$ steht. Also $a, \neg a, \neg\neg a \in S_\kappa$.

Es gilt nun entweder $\neg a \leq a$ oder $\neg a > a$. Im ersten Fall ist $0_\kappa < \neg a \leq a \leq \neg\neg a$ und folglich einerseits $\neg a = \neg a \wedge a = a \odot (a \rightarrow \neg a)$ und andererseits $\neg a = \neg a \wedge \neg\neg a = \neg\neg a \odot (\neg\neg a \rightarrow \neg a) = \neg\neg a \odot (a \rightarrow \neg a)$. Es folgt aus der Kürzungseigenschaft $a = \neg\neg a$.

Im zweiten Fall ist $0_\kappa < a \leq \neg\neg a \leq \neg a$ und damit $\neg a = \neg(a \wedge \neg\neg a) = (\neg\neg a \odot (\neg\neg a \rightarrow a)) \rightarrow 0_\kappa = (\neg\neg a \rightarrow a) \rightarrow \neg\neg\neg a = (\neg\neg a \rightarrow a) \rightarrow \neg a$. Es folgt $(\neg\neg a \rightarrow a) \odot \neg a = \neg a$ und damit $\neg\neg a \rightarrow a = 1$, das heißt $\neg\neg a = a$. □

Damit soll die Strukturtheorie für BL-Algebren abgeschlossen werden. Was einzig noch fehlt, ist die genaue Gestalt linear geordneter abelscher Gruppen, aus denen ja die MV- und Produktalgebren konstruiert sind. Deren Beschreibung sei hier weggelassen; zu finden ist der erschöpfende Auskunft gebende Hahnsche Einbettungssatz z.B. in [Fuc].

3.5 Vollständigkeit

Der Beweis der Vollständigkeit von **BL** erfolgt wieder in zwei Schritten. Wie im Fall der **KL** ist es zunächst einmal auch für die **BL** möglich, die Semantik zu verallgemeinern; statt durch das reelle Einheitsintervall können die Aussagen durch BL-Algebren belegt werden.

Definition 3.47 Die *Standard-Fuzzyaussagenlogik mit algebraischer Semantik*, kurz $\mathbf{BL_{alg}}$, sei ähnlich definiert wie die Standard-Fuzzyaussagenlogik **BL**, jedoch:

- Eine Belegung der Aussagen von $\mathbf{BL_{alg}}$ ist eine Funktion $v\colon \mathcal{P} \to L$ von der Menge der Aussagen in eine BL-Algebra $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ derart, daß für alle α, β gilt: $v(\alpha \odot \beta) = v(\alpha) \odot v(\beta)$, $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta)$ und $v(0) = 0$.

  Eine Aussage α heiße gültig unter einer Belegung v, in Zeichen $v \models \alpha$, falls $v(\alpha) = 1$. v heiße dann Modell von α.

  Eine Aussage α heiße gültig, in Zeichen $\models \alpha$, falls $v \models \alpha$ für alle Belegungen v gilt.

Für die algebraische Semantik ist Vollständigkeit wieder einfach zu beweisen.

Satz 3.48 *Die Logik* $\mathbf{BL_{alg}}$ *ist vollständig.*

Beweis. Das Vorgehen ist das gleiche wie im Fall von **KL**; s. Satz 2.20. □

Das weitere Vorgehen gleicht dem für **KL**. Der schwierige Beweisschritt besteht darin zu zeigen, für ein nicht beweisbares φ eine auf einer t-Norm basierende Belegung v existiert, für die $v(\varphi) < 1$ wird. Daß es eine

Belegung mit einer BL-Algebra mit $v(\varphi) < 1$ gibt, ist durch Satz 3.48 klar. Im nächsten Schritt wird nun dasselbe für eine Belegung mit einer linear geordneten BL-Algebra gezeigt. Der Übergang von einer linear geordneten BL-Algebra zu einer t-Norm ist dank des Struktursatzes 3.46 dann nicht mehr sonderlich schwierig.

Lemma 3.49 *Eine Aussage φ ist in* **BL** *beweisbar, gdw sie unter jeder Belegung mit einer linear geordneten BL-Algebra gültig ist.*

Beweis. Ist eine Aussage φ beweisbar, gilt gemäß Satz 3.48 $v(\varphi) = 1$ für jede Belegung v mit einer BL-Algebra, also insbesondere für jede mit einer linear geordneten solchen.

Es sei φ nicht beweisbar. Nach Satz 3.14 gibt es eine vollständige Theorie Φ, die φ ebenfalls nicht beweist. Dann gilt $[\varphi]_\Phi < [1]_\Phi$, womit also φ unter der Belegung $v\colon\ \mathcal{P} \to L,\ \ \alpha \mapsto [\alpha]_\Phi$ nicht gültig ist. Die Lindenbaumalgebra $\mathcal{L}_\Phi$ ist dabei linear geordnet; denn für jedes Paar α und β gilt entweder $\alpha \to \beta$ und folglich $[\alpha]_\Phi \leq [\beta]_\Phi$ oder $\beta \to \alpha$ und folglich $[\beta]_\Phi \leq [\alpha]_\Phi$. □

Lemma 3.49 hätte übrigens auch mithilfe der subdirekten Darstellbarkeit von BL-Algebren gezeigt werden können.

Für den letzten Schritt ist noch das folgende Faktum über BL-Algebren zu zeigen.

Definition 3.50 Eine BL-Algebra L_1 heiße *lokal darstellbar [locally representable]* durch eine BL-Algebra L_2, falls es für jede endliche Teilmenge $K \subseteq L_1$ eine injektive Abbildung $r\colon\ K \to L_2$ gibt, so daß aus $\alpha \odot \beta = \gamma$ für $\alpha, \beta, \gamma \in K$ folgt $r(\alpha) \odot r(\beta) = r(\gamma)$, weiter aus $\alpha \to \beta = \gamma$ für $\alpha, \beta, \gamma \in K\ \ r(\alpha) \to r(\beta) = r(\gamma)$ sowie für $0 \in K\ \ r(0) = 0$, für $1 \in K\ \ r(1) = 1$. Die Abbildung r werde in diesem Zusammenhang *Darstellung* von K genannt.

Lemma 3.51 *Jede linear geordnete MV-Algebra ist lokal darstellbar durch die łukasiewiczsche Wahrheitswertealgebra.*

Jede linear geordnete Produktalgebra ist lokal darstellbar durch die Produkt-Wahrheitswertealgebra.

Jede linear geordnete BL-Algebra ist lokal darstellbar durch eine t-normbasierte Wahrheitswertealgebra.

Beweis. Linear geordnete MV- wie Produktalgebren lassen sich gemäß den Lemmata 3.40 und 3.44 durch gewisse Teilmengen abelscher linear geordneter po-Gruppen darstellen.

Eine abelsche linear geordnete Gruppe $(G; +, \leq)$ kann in eine teilbare solche, etwa $(G', + \leq)$ eingebettet werden; s. [Fuc, IV.5, Lemma A]; dann ist G mit einer Teilmenge von G' identifizierbar. Dabei heißt eine Gruppe teilbar, falls für jedes $a \in G'$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $b \in G'$ mit $nb = a$ existiert.

Nun ist die Theorie nicht nur aus dem Neutralen 0 bestehender, teilbarer, linear geordneter Gruppen vollständig. Das heißt, daß in G' dieselben Sätze gelten wie in jeder anderen solchen Gruppe, also insbesondere dieselben wie in $(\mathbb{R}; +, \leq)$.

Es sei $K = \{g_1, \ldots g_k\}$ eine 0 enthaltende endliche Teilmenge von G. Weiter sei $\kappa(a_1, \ldots, a_k)$ die Konjunktion aller Formeln $a_{i_1} = a_{i_2} + a_{i_3}$, für die $g_{i_1} = g_{i_2} + g_{i_3}$ gilt, sowie der Formeln $a_{i_1} \leq a_{i_2}$, für die $g_{i_1} \leq g_{i_2}$ gilt; $i_1, i_2, i_3 \in \{1, ..., k\}$. Dann gilt in G und in G' und infolgedessen auch in $\mathbb{R}$ der Satz $\exists a_1 \ \ldots \exists a_k \quad \kappa(a_1, \ldots, a_k)$. Es folgt, daß es eine Abbildung $s\colon\ K \to \mathbb{R}$ gibt, die die in K existierenden Summen sowie die Ordnung erhält.

Es sei nun L eine linear geordnete Produktalgebra und $K \subseteq L$ endlich. Dann gibt im Hinblick auf Lemma 3.44 eine ordnungserhaltende Abbildung s von $K \setminus \{0\}$ in die negativen reellen Zahlen $\mathbb{R}^- = \{g \in \mathbb{R}\colon\ g \leq 0\}$, so daß für $a, b, c \in K \setminus \{0\}$ mit $a \odot b = c$ gilt $s(a) + s(b) = s(c)$. Es sei $r\colon\ K \to [0, 1]$ folgendermaßen definiert: Es sei $r(0) = 0$, und für $a \neq 0$ sei $r(a) = e^{s(a)}$. Dann ist, wie man leicht nachprüft, r eine Darstellung von K in der Produkt-Wahrheitswertealgebra $([0, 1]; \odot, \to, 0, 1)$.

Weiter sei L eine linear geordnete MV-Algebra und $K \subseteq L$ endlich; angenommen sei dabei, daß mit jedem a auch $\neg a$ in K liege sowie $0, 1 \in K$ seien. Im Hinblick auf Lemma 3.40 kann $L = G[0, u]$ für eine linear geordnete Gruppe angenommen werden. Es sei $r\colon\ K \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die die Ordnung und in K existierende Summen erhält; dann ist $r(0) = 0$, und ggf. durch Anbringung eines geeigneten Faktors kann $r(u) = 1$ erreicht werden. Also ist r ein ordnungserhaltende

Abbildung r von K nach $[0,1]$.

Es sei $a \in K$. Dann ist $a \to 0 = \neg a$, also mit Bezug auf G $u - a = \neg a$ oder $a + \neg a = u$. Da $\neg a \in K$, folgt $r(a) + r(\neg a) = 1$, also $r(\neg a) = 1 - r(a)$. Also wird die Operation $\neg$ erhalten. Weiter sei $a, b, c \in K$ mit $a \odot b = c$. Ist dann $a \geq \neg b$, gilt mit Bezug auf die Gruppe G $a + b - u = c$, also $a = c + \neg b$ und folglich $r(a) = r(c) + r(\neg b) = r(c) + 1 - r(b)$, also $r(a) \odot r(b) = r(a) + r(b) - 1 = r(c)$. Ist dann $a \leq \neg b$, gilt $a \odot b = 0$, also mit Bezug auf die Gruppe $a + b - u \leq 0$, also $a + b \leq u$ und folglich $r(a) + r(b) \leq 1$, also $r(a) \odot r(b) = 0$. Damit ist gezeigt, daß auch die Operation $\odot$, wo in K existent, erhalten wird. Da sich $\to$ durch $\odot$ und $\neg$ ausdrücken läßt, wird auch diese Operation erhalten. Also ist r eine Darstellung von K in der łukasiewiczschen Wahrheitswertealgebra $([0,1]; \odot, \to, 0, 1)$.

Schließlich sei L eine linear geordnete BL-Algebra und $K \subseteq L$ endlich. Es seien S_κ, $\kappa \in L$, wie in Satz 3.46, und J_K sei die endliche Teilmenge derjenigen Indizes κ, für die S_κ Elemente von K enthält.

Dann seien I_i, $i \in J_K$, sich paarweise nicht berührende Intervalle von $[0,1]$, die so in $[0,1]$ liegen, daß ihre Reihenfolge der Ordnung von J_K entspricht. Dabei sei I_i links geschlossen und rechts offen, falls S_κ ein kleinstes Element hat, und offen sonst. $\odot$ sei eine mittels dieser Intervalle gemäß Beispiel 3.5 konstruierte t-Norm.

Auf Grundlage des Satzes 3.46 folgt nun aus den ersten beiden Teilen dieses Lemmas, daß es eine Darstellung von K in der Algebra $([0,1]; \odot, \to, 0, 1)$ gibt. □

Satz 3.52 *Die Logik* **BL** *ist vollständig.*

Beweis. Gegeben sei eine Aussage φ. Gezeigt war, daß, wenn φ beweisbar ist, sie unter jeder Belegung mit einer stetigen t-Norm gültig ist.

φ sei nicht beweisbar. Gezeigt war mit Lemma 3.49, daß φ unter der Belegung mit einer gewissen linear geordneten BL-Algebra L nicht gültig ist. Aus den Lemmata 3.46 und 3.51 folgt, daß eine linear geordnete BL-Algebra durch eine t-Norm lokal darstellbar ist. Wie man sich leicht überlegt, hat φ folglich unter der Belegung seiner Unteraussagen mit gewissen Wahrheitswerten und unter der Interpretation seiner

Verknüpfungen durch eine gewisse t-Norm einen von 1 verschiedenen Wahrheitswert, ist φ also nicht gültig. □

Satz 3.53 *Eine Theorie von* **BL** *ist konsistent, gdw wenn sie mindestens ein Modell besitzt.*

Beweis. Φ sei eine konsistente Theorie. Dann ist die Lindenbaumalgebra $[\mathcal{L}]_\Phi$ eine nichttriviale BL-Algebra. Da sie überdies abzählbar ist, gibt es einen Homomorphismus von $[\mathcal{L}]_\Phi$ in eine auf einer stetigen t-Norm basierenden Wahrheitswertealgebra. Unter der zugehörigen Belegung haben alle Axiome den Wert 1; diese ist mithin Modell von Φ.

Hat umgekehrt Φ ein Modell, d.h. gibt es eine Belegung, unter der alle Elemente von Φ den Wahrheitswert 1 haben, gilt dies auch für alle Konsequenzen von Φ. Unter den letzteren kann die Aussage 0 demzufolge nicht sein. □

Was schließlich die strenge Vollständigkeit angeht, ist nicht die gleiche Schlußweise anwendbar wie im Fall von **KL**. Einzig gilt solche für $\mathbf{BL_{alg}}$, wenn man voraussetzt, daß die Theorie eine schematische Erweiterung von $\mathbf{BL_{alg}}$ darstellt.

4 Łukasiewiczsche, Produkt- und gödelsche Logik

4.1 Ansatz

Die Standardfuzzylogik **BL** ist diejenige Logik, die alle Aussagen beweist, denen unter jeder Belegung der eingehenden Teilaussagen der Wahrheitswert 1 zukommt – wobei man, und das war der entscheidende Punkt, die Konjunktion $\odot$ von einer beliebig gewählten t-Norm zu interpretieren hat und die Implikation $\rightarrow$ vom jeweils zugehörigen Residuum. Es handelt es sich folglich um so etwas wie eine minimale Fuzzylogik; dabei ist hier nicht von Wichtigkeit, daß durchaus noch schwächere Logiken denkbar sind.

Für praktische Anwendungen ist es nämlich umgekehrt wahrscheinlicher, daß man seiner Logik eine bestimmte, und zwar eine der üblichen t-Normen zugrundelegen möchte. Es gibt drei kanonische t-Normen, die in Beispiel 3.4 angegebenen: die łukasiewiczsche, die Produkt- und die gödelsche.

4.2 Definitionen

Es ist möglich, **BL** zu Logiken zu erweitern, die je einer der Standard-t-Normen entsprechen. Wir geben, um Wiederholungen zu vermeiden, eine einzelne Definition für alle drei.

Definition 4.1 Die *łukasiewiczsche, Produkt-* bzw. *gödelsche Aussagenlogik*, kurz **ŁL** bzw. **PL** bzw. **GL**, besteht je aus der Menge $\mathcal{P}$ von Aussagen, einer Modellierungsrelation $\models$ und einer Beweisrelation $\vdash$. Hierbei gilt:

- Die Aussagen sind wie für **BL** erklärt.
- Es sei $\odot$ die łukasiewiczsche bzw. die Produkt- bzw. die gödelsche t-Norm, und es sei $\rightarrow$ das zu $\odot$ gehörige Residuum. Dann sei eine *Belegung* der Aussagen eine Funktion $v: \mathcal{P} \rightarrow [0,1]$, so daß für alle Aussagen α und β gilt: $v(\alpha \odot \beta) = v(\alpha) \odot v(\beta)$, $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha) \rightarrow v(\beta)$ sowie $v(0) = 0$.

Eine Aussage α heiße gültig unter einer Belegung v, in Zeichen $v \models \alpha$, falls $v(\alpha) = 1$. v heiße dann Modell von α.

Eine Aussage α heiße gültig, in Zeichen $\models \alpha$, falls $v \models \alpha$ für jede Belegung v gilt.

- Die Axiome sind diejenigen von **BL** sowie im Fall **ŁL** außerdem

  (L) $\neg\neg\alpha \to \alpha$;

  im Fall **PL** außerdem

  (P1) $\neg\neg\alpha \to [(\alpha \odot \beta \to \alpha \odot \gamma) \to (\beta \to \gamma)]$,

  (P2) $\alpha \odot \neg\alpha \to 0$;

  und im Fall **GL** außerdem

  (G) $\alpha \to \alpha \odot \alpha$,

  jeweils für beliebige Aussagen α, β, γ.

  Die Relation $\vdash$ ist hiervon ausgehend wie für **BL** erklärt.

4.3 Vollständigkeit

Alle drei Logiken sind vollständig. Den Beweis dafür geben wir nur für einen Fall.

Satz 4.2 *Die Logik* **ŁL** *ist vollständig.*

Beweis. Das Axiom (L) ist, wenn auf Basis der łukasiewiczschen t-Norm interpretiert, gültig; es folgt daher wie im Fall von **BL**, daß überhaupt jede von **ŁL** bewiesene Aussage gültig ist.

Es sei weiter $\mathcal{L}_\Phi$ die Lindenbaumalgebra von **ŁL** für eine Theorie Φ von **ŁL**; das heißt, $\mathcal{L}_\Phi$ ist Lindenbaumalgebra von **BL** zur Theorie $\Phi \cup \{\neg\neg\alpha \to \alpha\colon\ \alpha \in \mathcal{P}\}$. Damit gilt für jede Aussage α, daß $[\neg\neg\alpha \to \alpha]_\Phi = [1]_\Phi$, also $\neg\neg[\alpha]_\Phi \leq [\alpha]_\Phi$ und weiter, da die umgekehrte Richtung ohnehin gilt, $\neg\neg[\alpha]_\Phi = [\alpha]_\Phi$. Dies heißt gerade, daß $\mathcal{L}_\Phi$ eine MV-Algebra ist.

Es sei φ in **ŁL** nicht beweisbar. Gemäß Satz 3.14 gibt es eine φ weiterhin nicht beweisbare vollständige Theorie Φ von **ŁL**. Da dann $[\varphi]_\Phi < [1]_\Phi$ und $\mathcal{L}_\Phi$ eine MV-Algebra ist, folgt, daß es eine linear geordnete MV-Algebra gibt, unter deren Belegung φ nicht das 1-Element zugeordnet ist.

Gemäß Lemma 3.51 ist eine linear geordnete MV-Algebra lokal durch die łukasiewiczsche t-Norm darstellbar. Es folgt, daß es eine Belegung der Unteraussagen von φ mit Wahrheitswerten gibt, unter der φ einen von 1 verschiedenen Wert hat. Also ist dann φ nicht gültig. $\square$

5 Fuzzy-Prädikatenlogik

5.1 Ansatz

Wie in der Einleitung ausgeführt, liegt mathematischem Schließen stets ein anschauliches Bild zugrunde. Im Fall der bislang diskutierten Aussagenlogik kann es sich dabei um ein frei gewähltes handeln; zu tun hatte man es nur mit den Aussagen selbst und deren wechselseitiger Abhängigkeit. Systeme der Aussagenlogik können sich folglich nur im Hinblick auf die möglichen Interpretationen der Wahrheitswerte unterscheiden, mit denen Aussagen belegt werden können; einer Aussage kann je nach Vorgabe z.B. immer ein scharfer Wahrheitswert zugeordnet sein, d.h. 0 oder 1, oder auch ein kontinuierlicher, wie etwa eine der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Im Gegensatz zur Aussagenlogik beziehen sich Systeme der Prädikatenlogik auf spezifische anschauliche Gegebenheiten und wird den formalisierten Aussagen ein gewisser Inhalt zugeordnet. Längenmaße und Anzahl sind die typischen Beispiele; das Axiomensystem der reellen und das der natürlichen Zahlen sind typische Vertreter von Theorien, die im Rahmen einer Prädikatenlogik formuliert sind.

Ausgegangen wird somit von einer konkret vorgestellten Struktur; um das für eine solche Struktur Geltende zu ergründen, dafür bietet die Prädikatenlogik passender Ausführung den formalen Rahmen. Spezifiziert wird eine Struktur so weit, wie es machbar ist, mithilfe einer in diesem System formulierten Theorie; eine exakte Spezifikation ist im allgemeinen nicht erreichbar. Aber alles aus der Theorie Beweisbare gilt, sofern der Kalkül korrekt ist, zumindest in der Struktur, von der man ausgegangen ist.

Gewöhnlich werden nun den formalisierten Aussagen scharfe Wahrheitswerte zugrundegelegt. Möglich ist es aber natürlich auch, den im Rahmen einer Prädikatenlogik formalisierten Aussagen unscharfe Werte zuzuordnen. Dies ist weniger üblich und technisch um einiges aufwendiger. Wie es dennoch bewerkstelligt werden kann, das ist der Inhalt dieses Abschnittes.

5.2 Definition

Der im folgenden beschriebene Kalkül ist die prädikatenlogische Version der *Basic Logic* **BL**. Es handelt sich um einen Kalkül, der ähnlich definiert ist wie die gewöhnliche Prädikatenlogik erster Stufe. Modelle von Axiomen der gewöhnlichen Prädikatenlogik sind Grundmengen zusammen mit gewissen hierauf erklärten Relationen; was sich hier ändert, ist, daß Modelle nunmehr Mengen sind, auf denen Fuzzyrelationen erklärt sind – und dies noch in einem verallgemeinerten Sinne. Des weiteren ist aber der Kalkül der Aussagen genau derjenige, der in **BL** vorgegeben ist.

Leider ist es im weiteren notwendig, die Menge der Wahrheitswerte, mit denen Aussagen belegt werden können, zu erweitern. Bliebe man beim reellen Einheitsintervall, wäre der Kalkül natürlich weiterhin korrekt; strenge Vollständigkeit hingegen wäre nicht gegeben.

Definition 5.1 Eine linear geordnete BL-Algebra L heiße *verallgemeinerte Wahrheitswertalgebra*.

Fuzzyrelationen in Hinsicht auf verallgemeinerte Wahrheitswerte sind nicht anders definiert als im Fall der Standardwahrheitswerte.

Definition 5.2 Es sei M eine nichtleere Menge, $k \geq 1$ und L eine verallgemeinerte Wahrheitswertalgebra. Dann heiße eine Abbildung R: $M^k \to L$ eine k-stellige *Fuzzyrelation* mit Werten in L.

Bemerkt sei, daß wir uns im weiteren auf Strukturen beschränken, in denen außer Konstanten nur Relationen vorkommen. Die Fuzzyfizierung von Funktionen stellt eine besondere Problematik dar, auf die nicht eingegangen wird.

Definition 5.3 Eine *Sprache* $\mathcal{S}$ der Prädikatenlogik besteht aus gewissen *Relationssymbolen* $R_1, \ldots, R_k$, $k \geq 0$, zusammen mit einer Zuordnung s, gemäß welcher jedem R_i, $i = 1, \ldots, k$, die *Stelligkeit* $s(R_i) \geq 1$ zukommt, sowie aus gewissen Konstantensymbolen $c_1, \ldots, c_l$, $l \geq 0$.

Die zu einer Sprache $\mathcal{S}$ gehörige *Standard-Fuzzyprädikatenlogik*, kurz $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$, besteht aus der Menge $\mathcal{P}$ von Aussagen, der Modellierungsrelation $\models$ und der Beweisrelation $\vdash$. Hierbei gilt:

- Die *Objektvariablen* von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$ sind die Symbole $a_0, a_1, \ldots$. Die Aussagen von **BL** sind die durch folgende Regeln zustandegekommenen Zeichenketten:

  (i) Für jedes Relationssymbol R_i ist $R_i(x_1, \ldots, x_{s(R_i)})$ eine Aussage, worin jedes $x_1, \ldots, x_{s(R_i)}$ entweder eine Variable oder eine Konstante darstellt; und es ist 0 eine Aussage. Aussagen dieser Form heißen *atomar*.

  (ii) Mit α und β sind auch $\alpha \odot \beta$ und $\alpha \to \beta$ Aussagen, wobei α und β, falls nicht atomar, in Klammern zu schließen sind. Eine Aussage eine dieser Formen heißt *Konjunktion* bzw. *Implikation*.

  (iii) Für eine Aussage γ und eine Variable x sind auch $\forall x\ \gamma$ und $\exists x\ \gamma$ Aussagen, wobei γ, falls Konjunktion oder Implikation, in Klammern zu schließen ist.

  Aussagen ohne freie Variable heißen *Sätze*.

- Es sei M eine nichtleere Menge und $(L; \leq, \odot, \to, 0, 1)$ eine verallgemeinerte Wahrheitswertalgebra. Dann heiße $(M; R_1, \ldots, R_k, c_1, \ldots, c_l)$ eine *L-Struktur für die Sprache $\mathcal{S}$*, falls R_i für jedes $i = 1, \ldots, k$ eine $s(R_i)$-stellige Fuzzyrelation auf M mit Werten in L und c_i für jedes $i = 1, \ldots, l$ ein Element von M ist.

  Es sei M eine L-Struktur für $\mathcal{S}$. Für jede Aussage φ, deren sämtliche freien Variablen unter den Variablen $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 0$, zu finden sind, und jedes n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ von Elementen aus M sei $\varphi(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$ der wie folgt definierte *Wahrheitswert von φ unter der Belegung* $(a_1, \ldots, a_n)$. Für $s(R_i)$-stellige Relationen R_i sei
  $$R_i(a_1/x_1, \ldots, c_j, \ldots) = R_i(a_1, \ldots, c_j, \ldots);$$
  der Wahrheitswert der Aussagen 0 sei 0; für Aussagen α und β sei weiter
  $$\begin{aligned}(\alpha \odot \beta)(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) = \\ &\alpha(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) \odot \beta(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n), \\ (\alpha \to \beta)(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) = \\ &\alpha(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) \to \beta(a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n);\end{aligned}$$

und für Aussagen γ mit mindestens der freien Variable x sei

$$\begin{aligned}
\forall x\, \gamma(x, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) &= \bigwedge_{a \in M} \gamma(a/x, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n), \\
\exists x\, \gamma(x, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n) &= \bigvee_{a \in M} \gamma(a/x, a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)
\end{aligned}$$

gesetzt, falls die betreffenden Infima bzw. Suprema existieren; andernfalls bleibt der Wahrheitswert undefiniert.

Ein Satz α heiße *in der L-Struktur M gültig*, in Zeichen $(M; L) \models \alpha$, falls der Wahrheitswert von α definiert und gleich 1 ist. α heiße *gültig*, in Zeichen $\models \alpha$, falls α in jeder L-Struktur für jedes mögliche L gültig ist.

- Axiome von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$ seien (F1), ..., (F7) für beliebige Aussagen α, β, γ. Hinzu kommen folgende.

  Für jede Aussage $\alpha(x)$, in der die Variable x nirgendwo im Bereich eines Quantors $\forall y$ oder $\exists y$ liegt oder y eine Konstante ist, seien Axiome die folgenden:

  (FP1) $\forall x\, \alpha(x) \to \alpha(y)$,

  (FP2) $\alpha(y) \to \exists x\, \alpha(x)$.

  Für Aussagen $\alpha(x)$ und β, wobei x in β nicht vorkommt, seien Axiome die folgenden:

  (FP3) $\forall x\, (\beta \to \alpha(x)) \to (\beta \to \forall x\, \alpha(x))$,

  (FP4) $\forall x\, (\alpha(x) \to \beta) \to (\exists x\, \alpha(x) \to \beta)$,

  (FP5) $\forall x\, (\alpha(x) \vee \beta) \to (\forall x\, \alpha(x) \vee \beta)$.

  Es sei Φ eine Menge von Aussagen von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$; Φ heiße dann Theorie von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$. Ein Beweis der Aussage α aus Φ sei eine Sequenz $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $n \geq 1$, dergestalt, daß den Abschluß die Aussage $\gamma_n = \alpha$ bildet und daß γ_m, $1 \leq m \leq n$, entweder aus Φ stammt oder Axiom von **KL** ist oder aus vorhergehenden Aussagen gemäß einer der folgenden Regeln abgeleitet ist:

$$\text{(MP)}\ \frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}, \qquad\qquad \text{(Ver)}\ \frac{\alpha(x)}{\forall x\ \alpha(x)}.$$

Eine Aussage α heiße *beweisbar* aus Φ, in Zeichen $\Phi \vdash \alpha$, falls es einen Beweis von α aus Φ gibt. α heiße *beweisbar*, in Zeichen $\vdash \alpha$, falls es beweisbar aus $\emptyset$ ist.

Falls die zugrundeliegende Sprache $\mathcal{S}$ im weiteren nicht näher benannt werden soll, wird **BLp** statt sonst **BLp**($\mathcal{S}$) geschrieben.

BL betreffende Begriffe werden im weiteren für **BLp** in gleicher Weise verwendet. Insbesondere gilt Definition 3.12 über die Konsistenz und die Vollständigkeit von Theorien von **BL** desgleichen auch für **BLp**.

Satz 3.14 besagt, daß eine ein gewisses α nicht beweisende Theorie von **BL** zu einer vollständigen solchen erweitert werden kann. Dasselbe gilt auch für **BLp**; gezeigt wird, da fürs folgende benötigt, nun ein noch stärkeres Lemma.

Definition 5.4 Eine Theorie Φ von **BLp** heiße *henkinsch*, falls es für jede von Φ nicht beweisbare Aussage $\forall x\ \varphi(x)$ eine Konstante c gibt, so daß Φ auch $\varphi(c)$ nicht beweist.

Man beachte, daß diese Bedingung, angewendet auf eine vollständige Theorie der klassischen Prädikatenlogik, bedeutet, daß es für jeden beweisbaren Satz $\forall x\ \varphi(x)$ eine Konstante c gibt, so daß $\varphi(c)$ beweisbar ist.

Lemma 5.5 *Es sei $\mathcal{S}$ eine Sprache der Prädikatenlogik und Φ eine konsistente Theorie von* **BLp**($\mathcal{S}$)*. Es sei $\mathcal{S}'$ die Sprache, die aus $\mathcal{S}$ durch Hinzunahme abzählbar unendlich vieler neuer Konstantensymbole hervorgeht.*

Φ kann zu einer vollständigen henkinschen Theorie Φ' von **BLp**($\mathcal{S}'$) *erweitert werden. Ist dabei α aus Φ nicht beweisbar, kann Φ' so gewählt werden, daß α aus Φ' auch nicht beweisbar ist.*

Beweis. Es sei α eine Aussage mit $\Phi \nvdash \alpha$.

Es sei $(\varphi_i, \psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung sämtlicher Paare von Aussagen von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S}')$ sowie $(\chi_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung sämtlicher Formeln mit der einzigen freien Variable x.

Es sei $\Phi_0 = \Phi$ sowie $\alpha_0 = \alpha$. Es gilt also $\Phi_0 \nvdash \alpha_0$. Es sei dann Φ_0' die gegenüber Φ_0 um eine der Formeln $\varphi_0 \to \psi_0$ oder $\psi_0 \to \varphi_0$ erweiterte Theorie, für die weiterhin $\Phi_0' \nvdash \alpha_0$ gilt.

Es sei d_1 die erste der neu hinzugefügten Konstanten. Im Fall, daß dann $\Phi_0' \nvdash \alpha_0 \vee \chi_0(d_1)$ gilt, sei $\Phi_1 = \Phi_0'$ und $\alpha_1 = \alpha_0 \vee \chi_0(d_1)$ gesetzt.

Damit gilt erstens konstruktionsgemäß $\Phi_1 \nvdash \alpha_1$. Daraus folgt unmittelbar zweitens, daß $\Phi_1 \nvdash \forall x\ \chi_0(x)$.

Im Fall, daß hingegen $\Phi_0' \vdash \alpha_0 \vee \chi_0(d_1)$ gilt, sei $\Phi_1 = \Phi_0' \cup \{\alpha_0 \to \forall x\ \chi_0(x)\}$ und $\alpha_1 = \alpha_0$ gesetzt.

Damit gilt erstens $\Phi_1 \nvdash \alpha_1$. Denn dann gilt auch $\Phi_0' \vdash \alpha_0 \vee \chi_0(x)$, da man ja im Beweis d_1 durch x ersetzen kann, und folglich $\Phi_0' \vdash \forall x\ (\alpha_0 \vee \chi_0(x))$ und weiter gemäß (PF5) $\Phi_0' \vdash \alpha_0 \vee \forall x\ \chi_0(x)$. Dies bedeutet nun $\Phi_0' \vdash (\forall x\ \chi(x) \to \alpha_0) \to \alpha_0$ und weiter $\Phi_0' \cup \{\forall x\ \chi(x) \to \alpha_0\} \vdash \alpha_0$. Gälte $\Phi_1 \vdash \alpha_1$, d.h. $\Phi_1 \vdash \alpha_0$, so wäre aufgrund von (F7) $\Phi_0' \vdash \alpha_0$, im Widerspruch zur Vorgabe.

Zweitens gilt $\Phi_1 \vdash \forall x\ \chi_0(x)$, weil ja $\Phi_0' \vdash \alpha_0 \vee \forall x\ \chi_0(x)$ bedeutet, daß $\Phi_1 \vdash (\alpha_0 \to \forall x\ \chi_0(x)) \to \forall x\ \chi_0(x)$.

In derselben Weise sei Φ_2 aus Φ_1, Φ_3 aus Φ_2 usw. konstruiert, und es sei $\Phi' \overset{\text{def}}{=} \bigcup_i \Phi_i$. Φ' ist dann nach Konstruktion vollständig. Weiter beweist Φ' α nicht; denn andernfalls wäre $\Phi_i \vdash \alpha$ für ein i und wegen $\vdash \alpha \to \alpha_i$ somit $\Phi_i \vdash \alpha_i$. Zudem ist Φ' henkinsch; denn $\Phi' \nvdash \forall x\ \chi_i(x)$ impliziert, daß beim i-ten Schritt der erste Fall zutraf: $\Phi_i' \nvdash \alpha_i \vee \chi_i(d_i)$; damit kann $\Phi' \vdash \chi_i(d_i)$ nicht sein, da dann wegen $\vdash \chi_i(d_i) \to \alpha_{i+1}$ $\Phi' \vdash \alpha_{i+1}$, also $\Phi_j \vdash \alpha_{i+1}$ für ein $j \geq i+1$, also $\Phi_j \vdash \alpha_j$ wäre. □

5.3 Lindenbaumalgebra

Dem Fall der Aussagenlogik **BL** entsprechend seien unter all den in einer Sprache $\mathcal{S}$ formulierbaren Sätze all diejenigen identifiziert, die von einer gegebenen Theorie von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$ als äquivalent beweisbar sind. Zusammen mit den elementweise angewandten logischen Operationen ist dies die Lindenbaumalgebra der zugehörigen Theorie.

Die folgende Definition stützt sich auf Lemma 3.16.

Definition 5.6 Es sei $\mathcal{S}$ eine Sprache und Φ eine Theorie von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$. Es gelte $\alpha \leftrightarrow_\Phi \beta$ im Fall $\Phi \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$.

Es heiße

$$\mathcal{L}_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \{[\varphi]_\Phi\colon\ \varphi \text{ Aussage von } \mathbf{BLp}(\mathcal{S})\},$$

ausgestattet mit den Operationen $\odot$ und $\to$ gemäß (7) sowie der Konstanten $\mathbf{0} = [0]_\Phi$ die *Lindenbaumalgebra* von $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$ zur Theorie Φ.

Hierin sind die Quantoren allerdings noch gänzlich außer acht gelassen. Erstrebt ist, daß auch $\forall$ und $\exists$ in einer sinnvollen Weise mit der Äquivalenzrelation $\leftrightarrow_\Phi$ kompatibel sind. Dies ist der Fall, wenn Φ eine henkinsche Theorie ist.

Lemma 5.7 *Es sei $\mathcal{S}$ eine Sprache der Prädikatenlogik und Φ eine henkinsche Theorie von* $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$*. Dann gilt für eine Aussage $\varphi(x)$ mit einziger freier Variable x*

$$\begin{aligned}
[\forall x\ \varphi(x)]_\Phi &= \bigwedge\{[\varphi(c)]\colon\ c \text{ ist Konstante}\},\\
[\exists x\ \varphi(x)]_\Phi &= \bigvee\{[\varphi(c)]\colon\ c \text{ ist Konstante}\}.
\end{aligned}$$

Beweis. Für jede Konstante c gilt $\vdash \forall x\ \varphi(x) \to \varphi(c)$; daher $[\forall x\ \varphi(x)]_\Phi \leq [\varphi(c)]_\Phi$.

Weiter sei α eine Aussage mit $[\alpha]_\Phi \leq [\varphi(c)]_\Phi$, also $\Phi \vdash \alpha \to \varphi(c)$ für alle Konstanten c. Gälte dann $\Phi \nvdash \alpha \to \forall x\ \varphi(x)$, so wegen (FP3) auch $\Phi \nvdash \forall x\ (\alpha \to \varphi(x))$ und wegen der Henkin-Eigenschaft $\Phi \nvdash \alpha \to \varphi(c)$ für eine Konstante c. Da dies ein Widerspruch ist, folgt $\Phi \vdash \alpha \to \forall x\ \varphi(x)$, also $[\alpha]_\Phi \leq [\forall x\ \varphi(x)]_\Phi$. Damit ist $[\forall x\ \varphi(x)]_\Phi = \bigwedge_c [\varphi(c)]_\Phi$ gezeigt.

Dies ist der erste Teil der Behauptung; der zweite folgt in analoger Weise. $\square$

5.4 Vollständigkeit

Zu prüfen ist wie im Fall der Aussagenlogik als erstes die Korrektheit und im weiteren die Vollständigkeit der Logik **BLp**. Dabei interessiert allerdings nur strenge Vollständigkeit; schließlich ist für die Spezifikation einer Struktur immer von einer Theorie auszugehen und interessieren deren Konsequenzen.

In folgendem Sinne ist die Logik $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$ streng vollständig.

Satz 5.8 *Es sei* $\mathcal{S}$ *eine Sprache der Prädikatenlogik und* Φ *eine Theorie von* $\mathbf{BLp}(\mathcal{S})$*.*

(i) *Sind alle Aussagen aus* Φ *in einer L-Struktur* M *für* $\mathcal{S}$ *gültig, so gilt dies auch für jede Aussage* φ *mit* $\Phi \vdash \varphi$*.*

(ii) *Ist eine Aussage* φ *in jeder L-Struktur* M *für* $\mathcal{S}$ *gültig, in der alle Aussagen aus* Φ *gültig sind, so gilt* $\Phi \vdash \varphi$*.*

Beweis. (i) Daß die Axiome (F1) bis (F7) gültig sind, war gezeigt. Die Gültigkeit von (FP1) und (FP2) ist offensichtlich.

Die Gültigkeit von (FP3) bis (FP5) folgt aufgrund der entsprechenden Eigenschaften über BL-Algebren. So gilt $\bigwedge_\iota (a \rightarrow b_\iota) = a \rightarrow \bigwedge_\iota b_\iota$ und $\bigwedge_\iota (b_\iota \rightarrow a) = (\bigvee_\iota b_\iota) \rightarrow a$, wie sich durch Verallgemeinerung der Beweise der Gleichungen (12) und (15) unschwer ergibt. Es folgen (FP3) und (FP4). (FP5) ist die Konsequenz aus Lemma 3.25.

Der Erhalt der Gültigkeit unter Modus ponens (MP) folgt wiederum wie in Satz 2.20; der Erhalt unter (Ver) ist offensichtlich.

(ii) Nachdem φ nötigenfalls mit Allquantoren versehen worden ist, kann angenommen werden, daß es sich um einen Satz handelt. Dieser sei aus Φ nicht beweisbar. Es sei Φ' die Erweiterung von Φ zu einer vollständigen henkinschen Theorie, die φ weiterhin nicht beweist. Dann ist $\mathcal{L}_{\Phi'}$ eine abzählbare linear geordnete BL-Algebra, und $[\varphi]_{\Phi'} < [1]_{\Phi'}$. M sei diejenige $\mathcal{L}_{\Phi'}$-Struktur, deren Grundbereich aus den Konstanten von Φ' besteht und die Relationen durch das entsprechende Element von $\mathcal{L}_{\Phi'}$ interpretiert. Dann sind in M alle Elemente von Φ gültig sind, nicht jedoch φ, dessen Wahrheitswert gemäß Lemma 5.7 definiert ist. $\square$

Literatur

[CEGT] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens, Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua, *Soft Comp.* **4** (2000), 106 - 112.

[CiOtMu] R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, „Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning“, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Fuc] L. Fuchs, „Partially ordered algebraic systems“, Pergamon Press, Oxford 1963.

[Haj1] P. Hájek, „Metamathematics of fuzzy logics“, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1998.

[Haj2] P. Hájek, Basic fuzzy logic and BL-algebras, *Soft Comp.* **2** (1998), 124 - 128.

[Hoe] U. Höhle, Commutative, residuated l-monoids, in: U. Höhle et al. (Hg.), „Non-classical logics and their applications to fuzzy subsets. A handbook of the mathematical foundations of fuzzy set theory“, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1995; 53 - 106.

[RaSi] H. Rasiowa, R. Sikorski, „The mathematics of metamathematics“, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warschau 1963.

[Sik] R. Sikorski, „Boolean Algebras“, Springer-Verlag, Berlin 1964 (2. Aufl.)